

## **Trabajo de grado**

Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Universidad del Valle



# **Estudio del entrelazamiento cuántico y dinámica efectiva para redes ópticas**

**Por:**

Mauricio Rengifo Castañeda

**Director:**

Prof. Javier Madroñero Pabón

**Co-Director:**

Dr. Carlos Alberto Parra Murillo

**Santiago de Cali, Abril 25 del 2019**



Dedicado a Gladys Y. Rengifo



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>7</b>
2.1. Condensado Bose-Einstein . . . . .	7
2.2. Redes ópticas . . . . .	7
2.3. Funciones de Bloch y Wannier . . . . .	8
2.4. Sistema Wannier-Stark . . . . .	9
2.5. Modelo Bose-Hubbard . . . . .	11
2.6. Sistema Wannier-Stark con $N = L = 2$ . . . . .	14
<b>3. Construcciones efectivas</b>	<b>17</b>
3.1. Formalismo de proyectores . . . . .	17
3.2. Transformación de Schrieffer-Wolff . . . . .	21
3.3. Análisis y comparación de los modelos . . . . .	26
3.4. Evolución del espín por sitio para los modelos . . . . .	27
<b>4. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>33</b>
<b>A. Formalismo de proyectores</b>	<b>35</b>
<b>B. Transformación Schrieffer-Wolff</b>	<b>37</b>
B.1. Breve derivación . . . . .	37
<b>C. Transformación a operadores de espín</b>	<b>39</b>
C.1. Transformación hamiltoniano de espines . . . . .	39
<b>D. Definición de constantes y rango de validez en el modelo Schrieffer-Wolff</b>	<b>41</b>
D.1. Constantes del modelo SWT . . . . .	41

D.2. Rango de validez del modelo Schrieffer-Wolff . . . . .	44
-------------------------------------------------------------	----

# Índice de figuras

2.1. Bandas de Bloch, esquema de bandas de energía $\varepsilon_\alpha(k)$ en la primera zona de Brillouin para un potencial de la forma $V(x) = \cos(x)$ . Tomada de [1]. . . . .	8
2.2. Representación esquemática de una escalera de Wannier-Stark en un potencial monocromático, incluidas las bandas de energía primera y segunda, los niveles adicionales corresponden al aumento en la energía de cada banda cuando hay más de una partícula en un sitio. Con $d = d_L$ . . . . .	10
2.3. Esquema de los dos procesos principales que tienen lugar en el sistema Wannier-Stark. Oscilaciones de Bloch dentro de la primera zona de Brillouin y tunelamiento Landau-Zener a bandas más altas. . . . .	11
2.4. Representación esquemática de los diferentes procesos en el sistema Wannier-Stark tales como las constantes de hopping $J_a$ y $J_b$ , las energías de interacción entre partículas $U_a$ , $U_b$ , $U_x$ y la constante $FC_0$ que indica las transiciones entre niveles de un mismo sitio. . . . .	13
2.5. Representación de la escalera Wannier-Stark con número de partículas $N = 2$ , sitios $L = 2$ y dos niveles de energía $\alpha = a$ (rojo) y $\alpha = b$ (azul) con la misma separación $\Delta$ por sitio $l$ . Con $d = d_L$ . . . . .	15
3.1. Variedades energéticas luego de la transformación gauge y los acoples que median las transiciones para el sistema Wannier-Stark con $N = L = 2$ . Tomada de [2].	18
3.2. División del espacio de Hilbert del problema en subespacios $P$ y $Q$ . . . . .	19
3.3. Esquema de la transición $ 11, 00\rangle \rightarrow  20, 00\rangle \rightarrow  10, 01\rangle$ y los operadores involucrados en el proceso. . . . .	20
3.4. Ubicación de las partículas por sitio de red en los estados de interés a los cuales se les asocia un pseudo-espín según sea la ubicación de la partícula en el sitio. . .	20
3.5. Esquema de la transición $ 01, 10\rangle \rightarrow  00, 20\rangle \rightarrow  00, 11\rangle$ y los operadores involucrados en el proceso . . . . .	23
3.6. Término del hamiltoniano que genera el ascenso y descenso de partículas en el primer y segundo sitio . . . . .	28
3.7. Término del hamiltoniano que media el ascenso y de partículas en el primer y segundo sitio . . . . .	28

3.8. Término del hamiltoniano que media la proyección del espín en el primer sitio y segundo sitio presenta una oscilación de Rabi en el segundo . . . . .	28
3.9. Término del hamiltoniano que presenta una oscilación de Rabi en el primer sitio y genera la proyección del espín en el segundo sitio . . . . .	28
3.10. Evolución del espín con respecto a tiempos cortos y $F = \Delta$ en los sitios $L = 1$ y $L = 2$ para $H_{SW}$ (línea azul) y $H_{PQ}$ (línea roja) comparados con la dinámica real (línea verde). Con $U = 0,034$ , $J = 0,006$ . . . . .	29
3.11. Evolución del espín con respecto a tiempos cortos y $F = 1,7\Delta$ en los sitios $L = 1$ y $L = 2$ para $H_{SW}$ (línea azul) y $H_{PQ}$ (línea roja) comparados con la dinámica real (línea verde). Tomando además $U = 0,034$ , $J = 0,006$ . . . . .	30
3.12. Evolución del espín con respecto a $F$ en los sitios $L = 1$ y $L = 2$ para $H_{SW}$ (línea azul) y $H_{PQ}$ (línea roja) comparados con la dinámica real (línea verde). Con $U = 0,034$ , $J = 0,006$ . Aquí los tiempos de evolución son los mismos $t = 140$ . . . . .	30
3.13. Medida de la correlación $\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle$ para dos valores de $F$ en $H_{SW}$ (línea naranja) y $H_{Total}$ (línea negra) . . . . .	31
3.14. Medida de la entrelazamiento Von Neumann para dos valores de $F$ en $H_{SW}$ . . . . .	31
3.15. Comparación de las medidas de entrelazamiento Von Neumann (línea roja) y Negatividad (línea azul) respecto a $F$ . . . . .	31
D.1. Como varia la energía de los estados de Fock ( $N = L = 2$ ) con respecto a $F$ y $\Delta$ . . . . .	44
D.2. Energías de los estados de Fock en $N = L = 2$ con $\Delta = 0, 1$ . . . . .	45
D.3. El rango de validez de la transformación SW lo determina valores de $F$ 0,2. . . . .	45



# Índice de cuadros

2.1. Base de Fock para un sistema Wannier-Stark con $N = L = 2$ . . . . .	15
3.1. Energies para la base de Fock en SW . . . . .	22



---

## Resumen

Los recientes estudios en el área de la materia condensada en donde átomos ultrafríos son atrapados en redes ópticas arrojan estudios relevantes en la simulación de procesos complejos gracias a que estos sistemas por su versatilidad permiten reajustarse a las características de sistemas más complicados logrando extraer información importante en una simulación de procesos. Existe una amplia gama de sistemas complejos que han revelado información útil por medio de estas simulaciones como por ejemplo los modelos de magnetismo cuántico, de donde surge el interés para la realización de este trabajo. Motivado por hallazgos realizados en sistemas que asemejan cadenas de espines el interés de este trabajo es encontrar un modelo que permita la descripción dinámica de un sistema de espines sujetos a una fuerza externa, para ello usamos el modelo de Bose-Hubbard que incluye las dos primeras bandas de Bloch de una red óptica unidimensional experimentando un campo externo del tipo Stark. Este último trae consigo fenómenos importantes dentro del sistema óptico como lo son el transporte longitudinal y efecto Landau Zenner que corresponde a un acople entre bandas vía tunelamiento resonante. La ocupación de las bandas por los átomos son la conexión a un sistema de espines. Centramos nuestra atención sobre el sistema de dos pozos, dos bandas y dos partículas ya que es la menor configuración que captura la esencia de lo que queremos modelar. El espín es definido como la ocupación de un bosón en cualquiera de las bandas para un solo pozo o sitio de red. Por la elección de nuestro sistema el espacio de Hilbert contiene diez estados como todas las posibles combinaciones de ocupación en la que solo nos interesa la dinámica de un subconjunto de estos estados, aquellos que poseen una partícula por sitio. Las descripciones efectivas son la herramienta importante en este estudio ya que permite reducir la complejidad en el tratamiento del sistema, pues reduce la dimensión del espacio de Hilbert al subespacio de interés. Nuestro estudio busca encontrar una buena descripción efectiva al mismo tiempo que explora el uso de estas herramientas en sistemas dependientes del tiempo ya que por lo general los formalismos efectivos actúan sobre hamiltonianos independientes del tiempo. Nos motiva a incursionar en este último tópico un estudio realizado en un sistema similar en el que se aplica una transformación de calibre que confina el subsistema que nos interesa pero lo deja con dependencia temporal.

## Abstract

Recent studies in the area of condensed matter where ultracold atoms are trapped in optical networks show relevant studies in the simulation of complex processes thanks to the fact that these systems, due to their versatility, allow readjusting to the characteristics of more complicated systems, extracting important information in a process simulation. There is a wide range of complex systems that have revealed useful information through these simulations, such as quantum magnetism models, from which the interest for the realization of this work arises. Motivated by findings made in systems that resemble spine chains, the interest of this work is to find a model that allows the dynamic description of a spin system subject to an external force, for this we use the Bose-Hubbard model that includes the first two Bloch bands of a one-dimensional optical network undergoing an external field of the Stark type. The latter brings with it important phenomena within the optical system such as the longitudinal transport and Landau-Zener effect that corresponds to a coupling between bands via resonant tuning. The occupation of the bands by atoms is the

---

connection to a system of spins. We focus our attention on the system of two wells, two bands and two particles since it is the smallest configuration that captures the essence of what we want to model. The spin is defined as the occupation of a boson in any of the bands for a single well or network site. By the choice of our system the Hilbert space contains ten states as all the possible combinations of occupation in which we are only interested in the dynamics of a subset of these states, those that have one particle per site. Effective descriptions are the important tool in this study since it allows to reduce the complexity in the treatment of the system, since it reduces the dimension of the Hilbert space to the subspace of interest. Our study seeks to find a good effective description at the same time that explores the use of these tools in time-dependent systems since usually the effective formalisms act on Hamiltonians independent of time. We are motivated to enter into this last topic a study carried out in a similar system in which a caliber transformation is applied that confines the subsystem that interests us but leaves it with temporal dependence.

# Capítulo 1

## Introducción

Desde los inicios de la mecánica cuántica el estudio de la materia ha sido uno de los campos de mayor enfoque para los físicos debido a los hallazgos tanto teóricos como experimentales. Con el desarrollo del láser se impulsó el estudio de la materia ultrafría logrando numerosos avances gracias a los innovadores procesos que permiten atrapar y enfriar átomos en regiones del espacio, como consecuencia se abrió la posibilidad del control cuántico. Algunos de los métodos con los que se logra minimizar la energía de átomos son el enfriamiento Doppler [3] y enfriamiento Raman [4]. Las redes ópticas permiten atrapar átomos fríos con alto grado de control variando parámetros como la profundidad de sus pozos y la periodicidad, y el análisis de las mismas ha permitido revelar importantes comportamientos traducidos en avances experimentales excepcionales ya que se ha podido simular una diversidad de sistemas físicos en ramas como el estado sólido [5, 6]. Entre los procedimientos para atrapar partículas resaltamos las trampas magneto ópticas [7] y las redes ópticas [8]. Estas trampas se construyen con la interferencia de láseres, la dimensionalidad y geometría se modifica añadiendo pares de láseres y variando los ángulos entre estos. Estas técnicas de atrapar y enfriar proponen la capacidad de controlar la materia cuántica. Uno de los primeros experimentos que mostró la alta capacidad de control fue realizado por Greiner en 2002 [9] donde se evidenció un cambio entre dos fases en una muestra de átomos de rubidio atrapados en una red óptica.

Un objetivo central de la física moderna de la materia condensada, es entender el comportamiento de las formas del magnetismo en sistemas mecánicos cuánticos. La materia ultrafría se puede encasillar en el campo de sistemas cuánticos complejos, siendo estudiados en gran parte a través del modelo de tipo Bose-Hubbard. Al estudiar la materia ultrafría, el modelo Bose-Hubbard es uno de los mas utilizados puesto que describe la dinámica de átomos bosónicos atrapados en redes ópticas permitiendo estudiar fenómenos como las transiciones de fase cuánticas [10, 11] y facilitando la construcción de sistemas que van desde superconductores de baja temperatura hasta dispositivos espintrónicos [12, 13]. Gracias a los numerosos aportes en estudio de átomos fríos atrapados en redes ópticas hoy día este modelo es una pulida configuración y los físicos se han beneficiado de esto para simular sistemas complejos de materia condensada en ciertos regímenes. Uno de estos sistemas es de especial interés para nuestro desarrollo, consta de una red óptica sometida a una fuerza externa que modifica la simetría traslacional de la red es conocido como sistema Wannier-Stark [1, 5, 14].

En este trabajo nos enfocamos en el problema Wannier-Stark unidimensional en un escenario

---

de muchos cuerpos el cual consiste en una red óptica sujeta a un campo estático. Estudiaremos el confinamiento de partículas bosónicas con el fin de simular el comportamiento de pseudo-espines definidos a través de la ocupación de una partícula por sitio. La motivación emerge por estudios realizados por Parra-Murillo y colaboradores [2], en la cuál una red óptica de dos bandas es sometida a una fuerza externa. Se muestra que al aplicar una transformación de calibre al hamiltoniano aparecen como resultado variedades energéticas, definidas por estados que satisfacen condiciones específicas. De allí, es de nuestro interés el subespacio de mínima energía, el cual se puede representar en términos de pseudo espines. Esto permite reducir la dimensión del espacio de Hilbert del problema original y tratar de manera efectiva. En el estudio se hacen medidas de entrelazamiento y presentamos dos descripciones para la dinámica del subsistema, el formalismo de proyectores [15] y la transformación Schrieffer-Wolff [16].

Los hamiltonianos efectivos son mucho más simples por que permiten reducir la complejidad en el tratamiento del sistema, pues reduce la dimensión del espacio de Hilbert a  $2^L$ , siendo  $L$  el número de sitios. Estamos interesados en poner a prueba dos modelos efectivos desde el hamiltoniano Bose-Hubbard. Aplicaremos el formalismo de proyectores a la variedad de menor energía que aparece en [2] ya que aquí están aislados los estados que contienen una partícula por sitio. En general este formalismo es valido para sistemas que no dependen del tiempo, pero aquí se va a chequear la implementación para sistemas dependientes del tiempo puesto que la configuración de la variedad en el espacio de Hilbert cumple las condiciones para usar este formalismo pero la variedad surge como resultado de una transformación gauge dependiente del tiempo. Usaremos la transformación Schrieffer-Wolff (SW) en el hamiltoniano Bose-Hubbard independiente del tiempo. Esta transformación SW es una generalización del formalismo de proyectores y en ella se diagonaliza perturbativamente el hamiltoniano al segundo orden en la interacción. La transformación de Schrieffer-Wolff se usa a menudo para proyectar las excitaciones de alta energía de un hamiltoniano cuántico de muchos cuerpos para obtener un modelo efectivo de baja energía [17]. Para nuestro subsistema independiente del tiempo los estados de interés son los de más baja energía y presentan diferencias con el resto de estados. Puesto que uno de los modelos que usamos es una generalización del otro podremos concluir acerca de la implementación de esta técnica en sistemas dependientes e independientes del tiempo. Al lograr describir la dinámica de un subsistema cuántico en una red óptica, facilitaría investigaciones de modelos adicionales en el campo de la materia condensada mejorando aún más nuestra comprensión de la misma.

Es difícil describir la física de estos sistemas a pesar de los avances computacionales. Sin embargo el concepto de simulación cuántica ha abierto un nuevo campo enorme de investigación en la física cuántica. Modelar la naturaleza a nivel cuántico es difícil pero puedes imitar el comportamiento de un sistema con otro mas controlable. El objetivo principal de tener un sistema más controlable es extraer la información esencial sobre el comportamiento del sistema original. Con esto en mente nos centraremos en describir la dinámica para solo dos sitios de red con dos partículas. Este subsistema es interesante por que puede suministrar la mayor información posible con la menor cantidad relevante de interacciones, suministrando entonces información útil sin aumentar la complejidad de lo que implica una construcción efectiva. Además toda la base de estados que acoplan dos espines quedan bien definidos por dos sitios con dos partículas. Nuestros modelos efectivos son estudiados mediante métodos numéricos y simulaciones computacionales que permiten extraer información sobre simetrías internas y correlaciones cuánticas. Recientemente se ha mostrado que la dinámica no hermítica permite revelar estructuras robustas

---

a procesos de decoherencia y la interacción entre partículas [2].

En el capítulo dos de este trabajo se encuentran los conceptos esenciales que utilizaremos para nuestro propósito. En el capítulo tres se crean las construcciones efectivas para el hamiltoniano Bose-Hubbard dependiente e independiente del tiempo; se transforman ambas descripciones para que queden expresadas en hamiltonianos de espines usando la condición de una partícula por sitio. También se estudian las dinámicas efectivas usando como observables las proyecciones de espín para cada sitio en un sistema de dos partículas, dos bandas y dos sitios; se comparan las mediciones para los dos sistemas y se varían algunos parámetros para establecer las dependencias con los mismos. Además se toman medidas de correlación para las proyecciones de los sitios y se usan dos medidas de entrelazamiento para cada construcción con el objetivo de determinar la dinámica de las estructuras en procesos de decoherencia e interacción de partículas. En el capítulo cuatro se extraen conclusiones luego de comparar las dinámicas efectivas.





# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Condensado Bose-Einstein

El entendimiento de la naturaleza estadística de la materia permitió alcanzar temperaturas cercanas al cero absoluto. Con esto se le abrió las puertas al estudio de materia ultrafría. Con ello se desarrollaron las primeras técnicas modernas para atrapar materia como las trampas ópticas magnéticas (MOT) [18], redes ópticas [19]. También algunas técnicas de enfriado como el enfriamiento Doppler [20, 21] y evaporative cooling [22] entre otras. El alcanzar estas temperaturas permitió desarrollar las condiciones para la observación de nuevos fenómenos. El condensado Bose-Einstein, fue propuesto por Albert Einstein en 1924, basado en ideas sobre partículas que obedecen la estadística de Bose [23, 24]. Para lograr el condensado Bose-Einstein se requiere someter un gas atómico a bajas temperaturas y que la distancia promedio entre átomos sea cercana a la longitud de onda térmica de De-Broglie  $\lambda_{dB} = \hbar / \sqrt{2\pi M k_b T}$ , siendo  $M$  la masa del gas,  $k_b$  la constante de Boltzman y  $T$  la temperatura del gas. Al alcanzar temperaturas muy bajas, si las partículas obedecen la estadística de Bose, estas ocuparan el mismo nivel cuántico, descendiendo al nivel de menor energía posible. Al compartir el mismo estado cuántico y tener la misma energía esto supone una serie de propiedades tales como ocupar el mismo volumen, dispersar luz del mismo color, constituir un medio homogéneo entre otras [25].

El condensado Bose-Einstein fue obtenido por primera vez en 1995 por los físicos Eric Cornell y Carl Wieman [26] quienes mas tarde se les otorgo el premio Nobel. Algunas de las consecuencias de este descubrimiento fueron creación de láseres atómicos [27], relojes atómicos [28] y el desarrollo de materia ultrafría en redes ópticas [29].

### 2.2. Redes ópticas

Las redes ópticas son formadas por el patrón de interferencia de láseres contrapropagantes y permiten atrapar átomos fríos con alto grado de control. Podemos pensar en una red óptica como una cadena periódica de trampas atómicas o pozos de potenciales en los cuales los átomos pueden ser confinados gracias a la interacción entre sus momentos dipolares atómicos y el campo eléctrico del láser. Si el campo eléctrico del láser varía espacialmente, se genera una

fuerza eléctrica sobre los átomos como resultado de un potencial dipolar dado por [30]

$$V_{dip} = \frac{3\pi c^2}{2w_0} \frac{\Gamma}{\Delta} \langle E(r) \rangle^2, \quad (2.1)$$

Siendo  $\Delta = w_L - w_0$  el detuning entre la frecuencia del campo eléctrico  $w_L$  y la frecuencia de transición del átomo  $w_0$ . Al tratar el átomo como un sistema de dos niveles con una separación de energía  $\hbar w_0$ , se introduce una tasa de decaimiento atómico  $\Gamma$ . Un potencial óptico puede actuar de forma repulsiva sobre el átomo si  $\Delta > 0$  y atractivo si  $\Delta < 0$  [31]. Dos láseres contrapropagantes generan un patrón de interferencia unidimensional, para aumentar las dimensiones en la interferencia (redes ópticas en 2D y 3D) se añaden pares de láseres contrapropagantes en diferentes ángulos (generalmente direcciones ortogonales). En este trabajo consideramos una red unidimensional con potencial dipolar de la forma

$$V(x) = V_1 \cos(2k_L x), \quad (2.2)$$

donde  $V_1$  es su respectiva amplitud y  $k_L = 2\pi/\lambda$  es el momento de retroceso. Debido a la periodicidad de este potencial aparecen dos bandas de energía o bandas de Bloch.

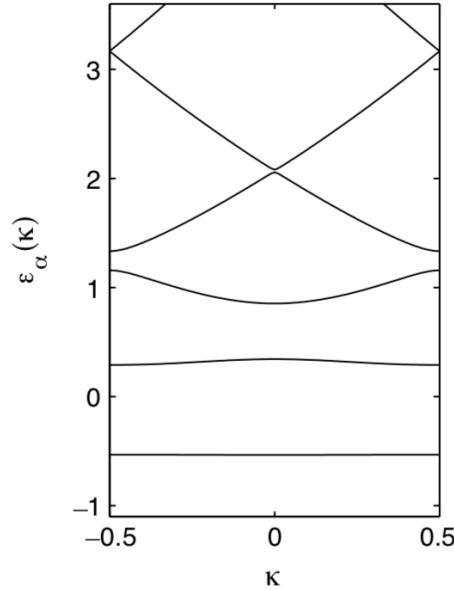


Figura 2.1: Bandas de Bloch, esquema de bandas de energía  $\varepsilon_\alpha(k)$  en la primera zona de Brillouin para un potencial de la forma  $V(x) = \cos(x)$ . Tomada de [1].

### 2.3. Funciones de Bloch y Wannier

Los potenciales periódicos como la ecuación (2.2) introducen las denominadas bandas de energía o bandas de Bloch (ver figura 2.1) las cuales surgen como soluciones de la ecuación

de Schrödinger con potenciales espacialmente periódicos y como consecuencia del teorema de Bloch [11].

Al tratar potenciales periódicos las funciones de Bloch son funciones de onda que permiten describir electrones en redes cristalinas periódicas determinadas por un potencial de la forma  $V(x) = V(x + d_L)$ , siendo  $d_L$  el periodo espacial o constante de red. Dichas funciones de Bloch son descritas por el producto de una función de onda plana y una función con la misma periodicidad del potencial como lo muestra la expresión

$$\psi_k^\alpha = e^{ikx} u_k^\alpha(x), \quad (2.3)$$

donde  $u_k^\alpha(x) = u_k^\alpha(x + d_L)$  y  $k$  es el cuasimomento de la partícula. La periodicidad del potencial produce una estructura de bandas [11] que son indexadas con  $\alpha$ . La separación entre dos bandas  $\Delta$ , se conoce como el gap de energía. Gracias a la periodicidad es el teorema de Bloch permite reducir el estudio del sistema a solo el espectro de energía en la primera zona de Brillouin correspondiente a el intervalo  $[-\pi/d_L, \pi/d_L]$ .

Las bandas de Bloch son funciones extendidas espacialmente, pero para una mejor descripción es conveniente realizar un cambio de base a funciones espacialmente localizadas alrededor de un sitio de red. Para ello hacemos uso de las funciones de Wannier [32], que se definen como la transformada de Fourier de las funciones de Bloch, es decir,

$$\chi_l^\alpha = \sqrt{\frac{d_L}{2\pi}} \int_{-\pi/d_L}^{\pi/d_L} e^{-id_L l k} u_k^\alpha(x) dk, \quad (2.4)$$

donde  $l$  indexa los sitios de la red. Con el potencial que se define en (2.2) podemos restringirnos a estudiar las dos primeras bandas de Bloch. Denotaremos por  $\alpha = a$ , a la primera banda y  $\alpha = b$ , a la segunda banda. Si sobre el sistema actúa un campo estático  $V_{ws}(x) = Fx$  con amplitud  $F$ , se define el conocido sistema Wannier-Stark [33].

## 2.4. Sistema Wannier-Stark

El campo externo modifica el potencial como lo muestra la figura 2.2. Esto hace que se pierda la estructura de bandas y se generen las llamadas escaleras o niveles de Wannier-Stark por cada sitio, con una separación energética  $\Delta$ . El hamiltoniano que describe un sistema Wannier-Stark toma la forma

$$H_{ws} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + Fx, \quad (2.5)$$

donde  $F$  es la magnitud del campo eléctrico externo que inclina la red el cual será tratado como parámetro de control y  $V(x)$  es de la forma (2.2). Las energías del nuevo sistema son dadas por  $\epsilon_l = E_0 + l d_L F$  [34].  $E_0$  corresponde a la energía del nivel inferior del primer sitio de la red ( $l = 1$ ). Por otro lado los autoestados del sistema, conocidos como estados Wannier son dados por

$$|w_l^\alpha\rangle = \sum_m \mathcal{J}_{m-l} \left( \frac{J_\alpha}{2d_L F} \right) a_m^\dagger |0\rangle, \quad (2.6)$$

donde  $\mathcal{J}_{m-l}$  son funciones de Bessel de primer tipo y  $J_\alpha$  es la constante de hopping que describe el tunelamiento de una partícula entre diferentes sitios de la red  $l$  para el respectivo nivel

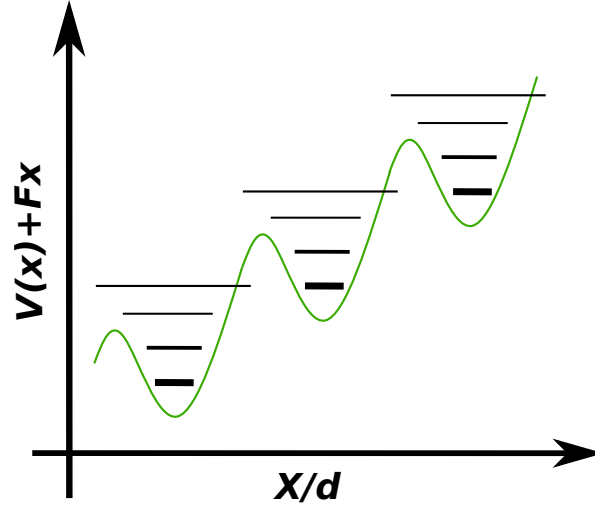


Figura 2.2: Representación esquemática de una escalera de Wannier-Stark en un potencial monocromático, incluidas las bandas de energía primera y segunda, los niveles adicionales corresponden al aumento en la energía de cada banda cuando hay más de una partícula en un sitio. Con  $d = d_L$ .

$\alpha$ . El hamiltoniano (2.5) es analíticamente diagonalizable en la aproximación tight-binding. Los autoestados Wannier-Stark son resonancias embebidas en el continuo. Por tanto estos estados son metaestables y sus autoenergías corregidas están dadas por

$$\epsilon_l^\alpha = E_\alpha + l d_L - \frac{i \Gamma_\alpha}{2}, \quad (2.7)$$

donde  $\Gamma_\alpha$  es la tasa de decaimiento de cada nivel. Esto aparece como consecuencia del espectro no delimitado y los estados Wannier-Stark. Uno de los efectos interesantes que aparecen como consecuencia de la fuerza externa son las oscilaciones de Bloch [35]. Al ubicar una partícula sobre la red, esta consigue acelerarse sin escapar del confinamiento de la red, en su lugar experimentara oscilaciones de Bloch con un periodo  $T_B = 2\pi/d_L F$ . Existe otro de los procesos interesantes denominado tunelamiento Landau-Zener [1], este fenómeno es caracterizado por la ascensión de partículas de una banda inferior a bandas de energía más altas. Si la partícula experimenta oscilaciones de Bloch, existe una probabilidad de que ascienda a la banda superior a medida que se acerca a la primera zona de Brillouin. Este efecto se mejora cuando dos escaleras Wannier-Stark se acoplan al máximo dando lugar al tunelamiento resonante entre bandas que tiene lugar para valores de la fuerza

$$F_{|l-l'|} = \frac{\Delta_{\alpha,\alpha'}}{d_L |l-l'|}, \quad (2.8)$$

donde  $s = |l-l'|$  define el orden de resonancia [36], el cual define el par de estados de partícula única al que asociaremos un pseudo-espín. En este trabajo se tomará  $s = 1$ , sin embargo se puede extender para otras resonancias. Asumimos además que  $\hbar = d_L = 1$ .

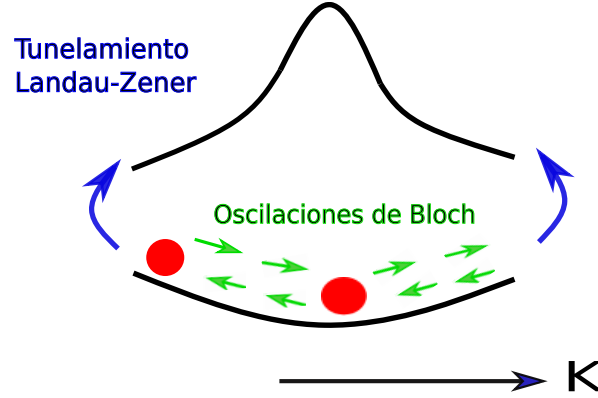


Figura 2.3: Esquema de los dos procesos principales que tienen lugar en el sistema Wannier-Stark. Oscilaciones de Bloch dentro de la primera zona de Brillouin y tunelamiento Landau-Zener a bandas más altas.

## 2.5. Modelo Bose-Hubbard

El modelo Bose-Hubbard estudia la dinámica de muchas partículas (para nuestro caso bosones) sujetas a potenciales periódicos y es utilizado para la descripción de la dinámica de átomos ultrafríos en redes ópticas [37, 38]. Motivado por los resultados en [2], queremos construir la dinámica efectiva para un sistema de pseudo-espines definidos por la ocupación de una partícula por sitio en una red óptica con dos niveles sujeta al hamiltoniano (2.5). Para ello es necesario derivar el modelo Bose-Hubbard para dos bandas. Partimos de la transformación de (2.5) por medio de operadores de campo definidos en términos de funciones de Wannier como

$$\phi(x) = \sum_{\alpha, l} \chi_l^\alpha(x) a_l^\alpha. \quad (2.9)$$

La transformación de (2.5) se realiza de la siguiente manera

$$H = \int dx \phi^\dagger(x) H_{ws} \phi(x). \quad (2.10)$$

El hamiltoniano (2.5) puede escribirse como

$$H_{ws} = H_0 + Fx, \quad (2.11)$$

con  $H_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x)$ , por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} H_0 &\rightarrow \int dx \phi^\dagger(x) H_{ws} \phi(x) \\ &= \int \sum_{l, \alpha} \chi_l^{\alpha*}(x - x_l) a_l^{\alpha\dagger} H_0 \sum_{l', \alpha'} (x - x_{l'}) a_{l'}^{\alpha'\dagger} dx \\ &= \sum_{l, l'} \sum_{\alpha, \alpha'} J_{l-l'}^\beta a_l^{\alpha\dagger} a_{l'}^\alpha, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde hemos definido

$$J_{l-l'}^\beta = \int \chi_l^{\alpha*}(x - x_l) H_0 \chi_{l'}^\alpha(x - x_{l'}) dx. \quad (2.13)$$

Las unidades de energía están dadas por  $E_r = k_l^2/2m$  correspondiente a la energía de retroceso en los átomos de la red. Se introduce el siguiente reescalamiento

$$k \rightarrow k/k_L, \quad x \rightarrow x/x_L, \quad V_i \rightarrow V_i/E_r \quad (2.14)$$

La interacción entre dos átomos fríos  $V_{pp}$  puede ser reducida a un pseudo potencial de la forma  $V_{pp} = g_{1D}\delta(x)$  [39], donde  $g_{1D} = 4\pi a_{1D}/M_r$  y  $a_{1D}$  es la longitud de dispersión unidimensional reducida. Así,  $V_{pp}$  transforma análogamente como  $H_0$  resultando

$$V_{pp} = g_{1D} \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4} M_{l_1, l_2, l_3, l_4}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4} a_{l_1}^{\alpha_1\dagger} a_{l_2}^{\alpha_2\dagger} a_{l_3}^{\alpha_3} a_{l_4}^{\alpha_4}, \quad (2.15)$$

con

$$M_{l_1, l_2, l_3, l_4}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4} = g_{1D} \int \chi_{l_1}^{\alpha_1*}(x - x_{l_1}) \chi_{l_2}^{\alpha_2*}(x - x_{l_2}) \chi_{l_3}^{\alpha_3}(x - x_{l_3}) \chi_{l_4}^{\alpha_4}(x - x_{l_4}) dx. \quad (2.16)$$

Puesto que las funciones Wannier son máximamente localizadas sobre los sitios de red las contribuciones que dominan la interacción en un solo sitio están dadas por  $M_{l,l,l,l}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4}$ . La discusión mas detallada acerca de los coeficientes de Bose-Hubbard puede ser aclarada en [40].

Por último el término  $Fx$  transforma como

$$\begin{aligned} Fx &\rightarrow \int dx \phi^\dagger(x) H_{ws} \phi(x) \\ &= d_L F \sum_{l, \alpha} l a_l^{\alpha\dagger} a_l^\alpha + d_L F \sum_{l, l'} \sum_{\alpha, \alpha'} C_{l-l'}^{\alpha, \alpha'} a_l^{\alpha\dagger} a_{l'}^{\alpha'} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Definimos los términos de hopping

$$J_a \equiv J_1^{\alpha=a}, \quad J_b \equiv J_1^{\alpha=b}, \quad (2.18)$$

las interacciones entre partículas

$$U_a \equiv 2M_{llll}^{1111}, \quad U_b \equiv 2M_{llll}^{2222}, \quad U_x \equiv 2M_{llll}^{1122}. \quad (2.19)$$

El hamiltoniano de Bose-Hubbard para dos bandas finalmente toma la forma

$$\begin{aligned} H = & \sum_l \sum_{\alpha=\{a,b\}} J_\alpha (\alpha_{l+1}^\dagger \alpha_l + \text{h.c.}) + \frac{U_\alpha}{2} (\alpha_l^{\dagger 2} \alpha_l^2 + \text{h.c.}) + \varepsilon_l^\alpha n_l^\alpha \\ & + \sum_l F C_0 (b_l^\dagger a_l + \text{h.c.}) + \sum_{\mu=\{-1,+1\}} \sum_l C_\mu F (b_{l+\mu}^\dagger a_l + \text{h.c.}) \\ & + \sum_l \frac{U_x}{2} (b_l^{\dagger 2} a_l^2 + \text{h.c.}) + 2U_x n_l^a n_l^b \end{aligned} \quad (2.20)$$

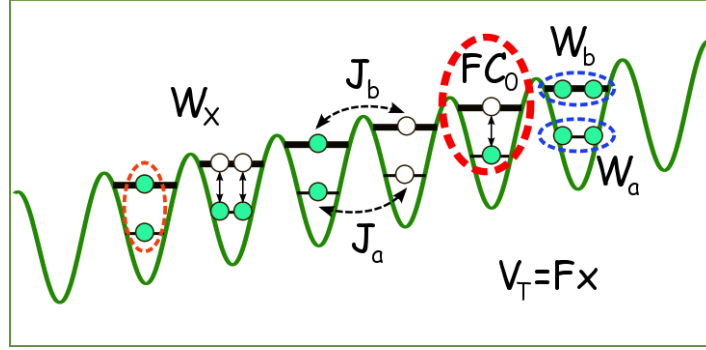


Figura 2.4: Representación esquemática de los diferentes procesos en el sistema Wannier-Stark tales como las constantes de hopping  $J_a$  y  $J_b$ , las energías de interacción entre partículas  $U_a$ ,  $U_b$ ,  $U_x$  y la constante  $FC_0$  que indica las transiciones entre niveles de un mismo sitio.

Donde cada parámetro representa determinado proceso en el sistema figura 2.4.  $J_\alpha$  son las tasas de tunelamiento entre los niveles  $\alpha = a$  ó  $\alpha = b$  para los sitios  $l$  y  $l + 1$ .  $FC_0$  es la tasa de transición inducida por el campo externo de magnitud  $F$  entre los dos niveles  $a$  y  $b$  para un mismo sitio  $l$ .  $FC_\mu$  con  $\mu = -1$  y  $\mu = +1$  corresponden a transiciones inducidas por  $F$  en los sitios vecinos  $l - 1$  y  $l + 1$  respectivamente.  $U_{a,b,x}$  es la energía correspondiente a tener dos o mas partículas en cada sitio de red.  $\varepsilon_l^\alpha = \Delta_\alpha + d_L F l$  son las energías de ocupación para el nivel  $\alpha$  en el sitio  $l$  con  $\Delta_\alpha = (\delta_{\alpha,b} - \delta_{\alpha,a})\Delta/2$  y  $\Delta$  el gap entre  $a$  y  $b$ ,  $\delta_{i,j}$  es el delta Kronecker. Los operadores  $\alpha_l^\dagger$  y  $\alpha_l$  son operadores de creación y destrucción asociados al sitio  $l$  ( $\alpha$  toma los valores  $a$  ó  $b$  y si tiene subíndice  $l$  entonces es un operador) y la regla de conmutación para estos es  $[\alpha_l, \alpha_l^\dagger] = 1$ .  $n_l^\alpha$  son los operadores número definidos como  $n_l^a = a_l^\dagger a_l$  y  $n_l^b = b_l^\dagger b_l$ .

Nuestro desarrollo en un problema Wannier-Stark constará inicialmente de una red óptica con dos niveles o bandas por sitio, por ende el hamiltoniano 2.20 es la mejor opción. Construiremos la base para luego hallar la descripción efectiva usando dos técnicas (el formalismo de proyectores y la transformación Schrieffer-Wolff). Para definir las dos bandas que tendrá la red usamos el potencial de la ecuación 2.2 que asegura dos niveles o estados de ocupación por sitio necesarios para la definición del pseudo-espín. Definidas las bandas, construimos la base reducida de Fock para el espacio de Hilbert del problema por medio de

$$|\{n\}\rangle = \{|n_1^a n_2^a \dots n_L^a, n_1^b n_2^b \dots n_L^b\rangle\}, \quad (2.21)$$

con dimensión  $N_f = (N + 2L - 1)!/N!(2N - 1)!$  dando  $N$  átomos bosónicos en  $L$  sitios de red.

La expectación es detallar el comportamiento de sitios que presentan la ocupación de una partícula ya que estos están inmersos en la evolución del sistema conjunto. Nos preguntamos ahora por el sistema conjunto y la mínima cantidad de partículas y sitios que nos permita asentar un buen estudio. Puesto que nos interesa establecer una descripción efectiva de un subconjunto de muchos estados, trataremos primero de generalizar el estudio usando la menor base posible, ya que el número de estados del sistema completo depende directamente de la cantidad de sitios y partículas que se tomen. Esto es tomado en cuenta debido a que las construcciones efectivas traen consigo cálculos extensos que dependen directamente del número de estados y el orden en las transiciones que se quiera tomar. En la siguiente sección explicamos por que la base de Fock para el sistema  $N = L = 2$  es una buena aproximación y en los modelos efectivos tomaremos

solo transiciones a segundo orden.

## 2.6. Sistema Wannier-Stark con $N = L = 2$ .

Los estudios en [2] muestran que las propiedades del estado estacionario en los sistemas con  $N = L$  que son sometidos a una fuerza externa presentan características notables como el entrelazamiento y la generación de subespacio sin decoherencia e interacción. El interés particular sobre el anterior trabajo es la configuración que presentan los estados de un sistema Wannier-Stark con  $N = L = 2$  luego de ser aplicada una transformación de calibre sobre el hamiltoniano Bose-Hubbard que define los estados dentro de variedades energéticas. Aquella variedad que contiene una partícula por sitio queda descrita dentro de la variedad de menor energía. Esto es interesante por que los estados de una partícula por sitio pueden ser asociados a pseudo-espines. Surge la idea de una construcción efectiva para dicha variedad con la ayuda del formalismo de proyectores. El principal interrogante que nace es debido a que el formalismo de proyectores es aplicado de forma general a hamiltonianos independientes del tiempo. No obstante el objetivo primordial es lograr una correcta descripción efectiva de estados de una partícula por sitio, así que, aplicaremos la transformación SW al hamiltoniano Bose-Hubbard independiente del tiempo. Entonces la ruta de este estudio es encaminada a buscar la descripción para pseudo-espines por medio de dos formas que luego serán contrastadas para determinar cual es la forma optima y de paso verificar si el formalismo de proyectores puede lograr asemejarse a una buena descripción luego de ser aplicado a un hamiltoniano dependiente del tiempo.

Es de resaltar la conveniente reorganización de la representación de Fock a estados de espines acoplados que se usó en el anterior trabajo, ya que se puede facilitar el estudio de cadenas de espines que proveen mucha información como en [41]. Aquí se un sistema de átomos bosónicos confinados en una red óptica para simular una cadena de espines interactivos. Las fuertes interacciones de entre espines se logran a través de la ocupación de los átomos por sitio para el mapeo de pseudo-espines lo que define una cadena de estos si se tiene en cuenta toda la red. Se encuentra que al variar un campo magnético, las fluctuaciones cuánticas de estas cadenas conducen una transición de una fase paramagnética a una fase antiferromagnética. En la fase paramagnética, la interacción entre los espines se ve influenciada por el campo aplicado, que los alinea [41]. En la fase antiferromagnética, la interacción domina y produce un ordenamiento magnético escalonado. Estos resultados podrían ampliar investigaciones adicionales de modelos magnéticos utilizando átomos ultrafríos.

Nosotros queremos desarrollar una dinámica involucrada a sistemas que se les pueda asociar un pseudo-espin. El subsistema que captura en esencia los procesos relevantes para estos tipos de modelos es el sistema Wannier-Stark para dos bandas con dos sitios y dos partículas  $N = L = 2$  (ver figura 2.5). De este se puede extraer información general que luego puede ser extendida a sistemas con mas sitios y mas partículas tal es el caso de [2]. Esta escogencia es muy versátil para lo que queremos hacer, ya que las construcciones efectivas en general se vuelven laboriosas de diseñar cuando se incrementan los procesos, las interacciones o los grados de libertad del sistema. Al involucrar por ejemplo mas sitios tendríamos que incorporar mas términos en el hamiltoniano concernientes a saltos inter-banda; si incrementamos las partículas aumentan los operadores y las interacciones. En principio las interacciones a primeros vecinos son las que más aportan a la hora de describir una dinámica de este estilo. Si nos restringimos



al sistema  $N = L = 2$  los estados que nos interesan están contenidos dentro de la base de Fock (ver cuadro 2.1) de esta escogencia, pero la mayor ventaja es que la construcción efectiva no se vuelve tan tediosa y aún así se logra capturar la dinámica de los procesos mas importantes.

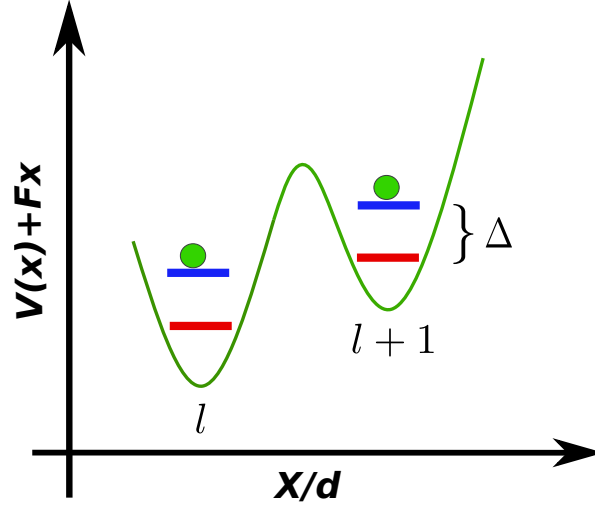


Figura 2.5: Representación de la escalera Wannier-Stark con número de partículas  $N = 2$ , sitios  $L = 2$  y dos niveles de energía  $\alpha = a$  (rojo) y  $\alpha = b$  (azul) con la misma separación  $\Delta$  por sitio  $l$ . Con  $d = d_L$ .

Usando la representación definida en 2.21, teniendo la estructura del subsistema como lo muestra la figura 2.5 determinamos la base

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Estado</i>	$ 11, 00\rangle$	$ 10, 01\rangle$	$ 01, 10\rangle$	$ 00, 11\rangle$	$ 20, 00\rangle$	$ 02, 00\rangle$	$ 00, 20\rangle$	$ 00, 02\rangle$	$ 10, 10\rangle$	$ 10, 01\rangle$

Cuadro 2.1: Base de Fock para un sistema Wannier-Stark con  $N = L = 2$ .

Denotaremos  $\alpha = \{a, b\}$  como los niveles en cada sitio, siendo  $a$  el nivel inferior. Para cada una de las construcciones efectivas nuestros estados de interés son 1,2,3 y 4 del cuadro 2.1.



## Capítulo 3

# Construcciones efectivas

### 3.1. Formalismo de proyectores

Muchas veces aplicar una transformación a un hamiltoniano permite realizar una descripción mas sencilla del sistema cuántico de interés. Estudios realizados en [2] en el que se trabajó el sistema Wannier-Stark con  $N = L = 2$ , muestran que al someter el correspondiente hamiltoniano Bose-Hubbard a una transformación gauge, se remueven términos del mismo y se define un nuevo funcional de energía para la base de Fock. Esta energía queda descrita en subespacios de estados degenerados donde precisamente una de estas variedades corresponde a sitios de red con una sola partícula. Estamos interesados en capturar la dinámica de una sola partícula en sitios con dos niveles lo que nos permite simular un pseudo-espín por sitio. La extensión a una red óptica se asemeja a tener una cadena de espines, de donde se podría extraer información útil concerniente a sistemas de espines lo cual ofrece muchas ventajas en el estudio de las propiedades magnéticas de materiales [41] o el desarrollo de dispositivos espintrónicos

Partamos del hamiltoniano Bose-Hubbard para dos bandas en la ecuación (2.20)

$$\begin{aligned} H' = H_0 &+ \sum_l F C_0 \left( \hat{b}_l^\dagger \hat{a}_l + \text{h.c.} \right) \\ &+ \sum_{\alpha=\{a,b\}} \sum_l J_\alpha (\hat{\alpha}_{l+1}^\dagger \hat{\alpha}_l + \text{h.c.}) \\ &+ \sum_{\mu=\{\pm 1\}} \sum_l C_\mu F \left( \hat{b}_{l+\mu}^\dagger \hat{a}_l + \text{h.c.} \right) \\ &+ \sum_l \frac{U_x}{2} \left( \hat{b}_l^\dagger{}^2 \hat{a}_l^2 + \text{h.c.} \right), \end{aligned}$$

donde los términos diagonales vienen dados por

$$\hat{H}_0 = \sum_{l,\alpha} \left[ (\Delta_\alpha + F l) n_l^\alpha + \frac{U_\alpha}{2} n_l^\alpha (n_l^\alpha - 1) \right] + 2U_x \sum_l n_l^a n_l^b.$$

Queremos encontrar la dinámica efectiva de un sistema Wannier-Stark de muchos cuerpos.

Basándonos en recientes resultados sobre la dinámica efectiva no hermítica en [2], encontramos que si se cambia el marco de referencia del hamiltoniano Bose-Hubbard para dos bandas (2.20) aparecen unas variedades energéticas. Esto se logra aplicando una transformación de gauge a los operadores dada por

$$\alpha_l \rightarrow \alpha_l \exp \left[ -i \left( \Delta_\alpha - \frac{1}{2} U_\alpha - lF \right) t \right]. \quad (3.1)$$

Siendo  $\Delta_\alpha = (\delta_{\alpha,b} - \delta_{\alpha,a})\Delta/2$  con  $\Delta$  como el gap de energía entre los niveles de un mismo sitio,  $U_{\alpha,x}$  la fuerza de interacción entre partículas por sitio y  $F$  la fuerza externa.

Esta transformación remueve algunos términos del hamiltoniano y define el funcional de energía  $E_\nu^\lambda[\{n\}]$  el cual permite dividir la base de Fock en conjuntos de estados degenerados(ver figura 3.1).

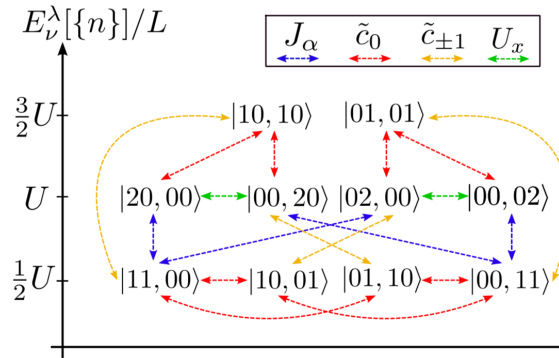


Figura 3.1: Variedades energéticas luego de la transformación gauge y los acoplos que median las transiciones para el sistema Wannier-Stark con  $N = L = 2$ . Tomada de [2].

El hamiltoniano puede ser reescrito como  $\hat{H} = E_\nu^\lambda[\{n\}] + V(t)$ . Por lo tanto podemos reorganizar la base dentro de subespacios de estados degenerados, donde la variedad de menor energía corresponde a estados Fock que cumplen la condición  $n_l^a + n_l^b = 1$ . Nuestro interés es modelar la dinámica efectiva a partir esta variedad puesto que son estados con un sola partícula por sitio. Para construir la dinámica efectiva se hará uso del formalismo de proyectores [15]. Dividiendo el espacio de Hilbert del sistema como lo muestra la figura 3.2.

Bajo las suposiciones del formalismo de proyectores (apéndice appendix:proyectores) el hamiltoniano efectivo para el subespacio  $P$  viene dado por

$$H_{\text{eff}}(E) = H_{PP} + H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP}, \quad (3.2)$$

donde  $E$  es un parámetro energético a ser determinado con ayuda del gauge. Sean  $\{|P_i\rangle\}$  los estados del subespacio  $P$  y  $\{|Q_i\rangle\}$  los estados del subespacio  $Q$ . Los elementos matriciales de 3.2 toman la forma

$$\begin{aligned} \langle P_i | H_{\text{eff}}(E) | P_j \rangle &= \langle P_i | H | P_j \rangle \quad (\text{Primer Orden}) \\ &+ \sum_l \frac{\langle P_i | H | Q_l \rangle \langle Q_l | H | P_j \rangle}{E - \epsilon_l} \quad (\text{Segundo Orden}). \end{aligned}$$

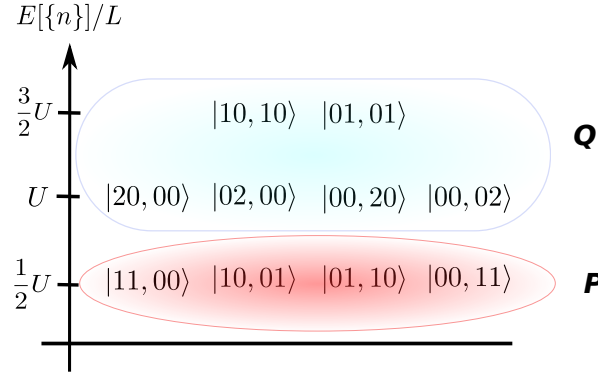


Figura 3.2: División del espacio de Hilbert del problema en subespacios  $P$  y  $Q$ .

Siendo  $\varepsilon_l$  la energía del estado auxiliar  $|Q_i\rangle$  el cual media el acople entre los estados de la base  $P$  por medio de una transición a segundo orden. Los términos a primer orden y la parte diagonal corresponde a las matrices

$$H_1 = \begin{pmatrix} 3F - \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3F + \Delta \end{pmatrix} + C_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para los términos a segundo orden usaremos un estado virtual  $|Q_l\rangle$  que medie la transición entre estados  $|P_i\rangle$  y procedemos a construir el operador de dicha transición. Por ejemplo, para un salto entre los estados  $|11, 00\rangle \rightarrow |10, 01\rangle$  tenemos las transiciones virtuales  $|20, 00\rangle$ ,  $|10, 10\rangle$  y  $|10, 01\rangle$ . Construyamos el operador para la transición  $|11, 00\rangle \rightarrow |20, 00\rangle \rightarrow |10, 01\rangle$  como sigue: usando los operadores de creación y destrucción ( $\hat{\alpha}_l^\dagger$  y  $\hat{\alpha}_l$ ), solo se movilizará una partícula por transición. Se necesita movilizar entonces la partícula de la banda  $a$  del segundo sitio a la misma banda del primer sitio con el operador  $\sqrt{2}J_a\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2$ . El factor  $J_a$  es el coste de movernos entre los sitios de las bandas inferiores y  $\sqrt{2}$  aparece como normalización de la función de onda para dos partículas en un sitio. Ahora, estando en  $|20, 00\rangle$  saltamos a  $|10, 01\rangle$  por medio del operador  $\sqrt{2}C_+\hat{b}_2^\dagger\hat{a}_1$ , donde  $C_+$  corresponde al coste de la transición dipolar debido a movilizar la partícula de la banda inferior del primer sitio a la banda superior del segundo sitio y  $\sqrt{2}$  por normalización de la función de onda. Tenemos que el operador de transición para  $|11, 00\rangle \rightarrow |20, 00\rangle \rightarrow |10, 01\rangle$  es

$$\frac{2J_aC_+}{E - \varepsilon_{|20,00\rangle}} \hat{b}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2. \quad (3.3)$$

La figura 3.3 permite ilustrar este proceso.

Para determinar los parámetros de segundo orden en ecuación 3.2, aplicamos la transformación 3.1 en el operador que acabamos de construir, esto fija el parámetro  $E$  como la energía de la variedad mas baja y define  $\varepsilon_{|20,00\rangle}$  como la energía del estado virtual  $|20, 00\rangle$ , (ver figura 3.1). Recordando que  $\hat{\alpha}_l\hat{\alpha}_l^\dagger = (\hat{n}_l^\alpha + 1)$  y tomando las condiciones  $J_a = J, J_b = -J, C_+ = C_- = C$ , el operador C.1 toma la forma

$$-\frac{J \cdot C}{U/2} (n_1^a + 1) \cdot (b_2^\dagger a_2 e^{i\Delta t} + \text{h.c.}).$$

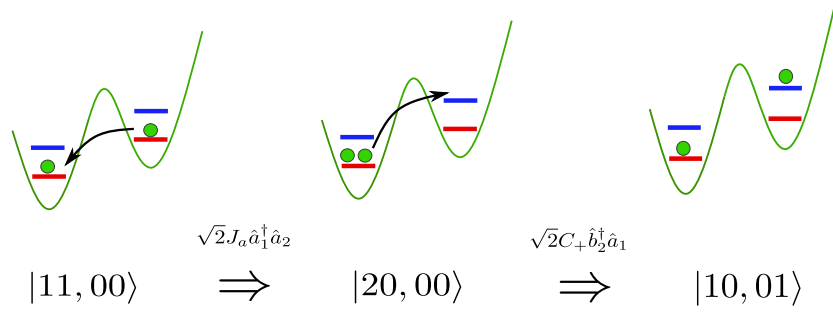


Figura 3.3: Esquema de la transición  $|11, 00\rangle \rightarrow |20, 00\rangle \rightarrow |10, 01\rangle$  y los operadores involucrados en el proceso.

Se hace el mismo proceso para las transiciones virtuales que faltan entre  $|11, 00\rangle \rightarrow |10, 01\rangle$  y se halla para el resto de transiciones entre estados  $P_i$ . Resaltemos que en este proceso todos los operadores virtuales involucrados para las transiciones en  $P$  pertenecen al subespacio  $Q$ , es decir, que no pueden mediar una transición en  $P$  usando otro estado de  $P$ .

Por último nuestro sistema de interés  $P$  lo rige una característica esencial que permite asociar a cada sitio de red un pseudo-espín. Por ejemplo, nuestros estados de interés corresponden a  $|11, 00\rangle$ ,  $|10, 01\rangle$ ,  $|01, 10\rangle$  y  $|00, 11\rangle$  (ver figura 3.2). El cambio de representación lo muestra la figura 3.4

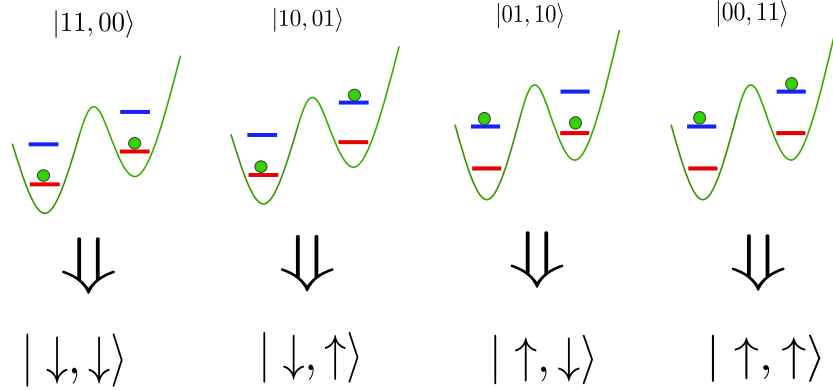


Figura 3.4: Ubicación de las partículas por sitio de red en los estados de interés a los cuales se les asocia un pseudo-espín según sea la ubicación de la partícula en el sitio.

así la base de los estados que involucran una partícula por sitio quedan descritos en términos de una base que puede ser considerada como la base de dos qbits.

$$\begin{aligned} |11, 00\rangle &\rightarrow |\downarrow, \downarrow\rangle & |10, 01\rangle &\rightarrow |\downarrow, \uparrow\rangle \\ |01, 10\rangle &\rightarrow |\uparrow, \downarrow\rangle & |00, 11\rangle &\rightarrow |\uparrow, \uparrow\rangle \end{aligned}$$

Por ende, nuestro hamiltoniano efectivo debe ser modificado para reproducir una dinámica de espines. Nuestros estados de interés cumplen la relación  $n_l^a + n_l^b = 1$ . Definimos  $n_l^b - n_l^a = \sigma_l^z$ ,

los valores de  $\sigma_l^z$  son  $\{1, -1\}$  esto permite asociar una medida a nuestro sistema (proyección del espín). Con estas condiciones podemos reescribir los operadores como

$$\begin{aligned}\frac{1 - \sigma_l^z}{2} &= n_l^a, \\ \frac{1 + \sigma_l^z}{2} &= n_l^b, \\ \sigma_l^+ &= b_l^\dagger a_l, \\ \sigma_l^- &= a_l^\dagger b_l.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Donde el operador  $\sigma_l^z$  actúa en el sitio  $l$ . A manera de ejemplo veamos como actúan las diferentes matrices definidas anteriormente sobre estados espín:  $\sigma^z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$ ,  $\sigma^+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$ ,  $\sigma^- |\downarrow\rangle = 0$ .

Luego de simplificar términos y reorganizar todo tenemos que (3.2) puede reescribirse en términos de operadores de espín como

$$\begin{aligned}H_{\text{PQ}} &= -20\lambda (1 - \alpha^2) \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \\ &+ (FC_0 + 2\lambda\alpha\hat{\sigma}_1^z) \otimes \sigma_2^+ e^{it\Delta} + \text{h.c.}) \\ &+ (\sigma_1^+ e^{it\Delta} + \text{h.c.}) \otimes (FC_0 + 2\lambda\alpha\hat{\sigma}_2^z) \\ &+ \lambda (\sigma_1^+ \otimes \hat{\sigma}_2^- + \text{h.c.}) \\ &- \lambda\alpha^2 (\sigma_1^+ \otimes \hat{\sigma}_2^+ e^{i2t\Delta} + \text{h.c.}) .\end{aligned}\tag{3.5}$$

Donde  $\lambda = 2J^2/U$ ,  $\alpha = FC/J$  y  $F$  la fuerza externa.

## 3.2. Transformación de Schrieffer-Wolff

Para construir un hamiltoniano efectivo desde la transformación Schrieffer-Wolff independiente del tiempo procedemos a transformar el hamiltoniano completo Bose-Hubbard para dos bandas 2.20 de la forma  $H = U^\dagger H U$  donde  $U = e^{-s}$  (transformación antesimétrica). Nuestro análisis se restringe al régimen del campo Stark fuerte  $F$ , de modo que  $F \sim U$ .

Para este trabajo es de particular interés trabajar en el caso para el que la amplitud de salto  $J$  es mucho menor que la fuerza de interacción  $U$ . La transformación SW consiste en la separación del hamiltoniano (2.20) como  $H = H_0 + V$ , siendo  $H_0$  el término correspondiente a la energía de los estados dada por

$$E[n_l^a, n_l^b] = \sum_l \left[ \frac{\Delta}{2} (n_l^b - n_l^a) + \frac{U}{2} (n_l^b - n_l^a)^2 + 3U n_l^b n_l^a + lF(n_l^b + n_l^a) \right], \tag{3.6}$$

luego  $V$  es la perturbación al hamiltoniano  $H_0$  expresada por

$$V = \sum_l \sum_{\alpha=\{a,b\}} J_\alpha (\alpha_{l+1}^\dagger \alpha_l + \text{h.c.}) + \sum_l FC_0 (b_l^\dagger a_l + \text{h.c.}) + \sum_{\mu=\{-1,+1\}} \sum_l C_\mu F (b_{l+\mu}^\dagger a_l + \text{h.c.}). \tag{3.7}$$

Luego sus autovalores y autovectores son conocidos.

Basados en el apéndice B.1 los elementos matriciales de la transformación vienen dados por

$$(H_{\text{eff}})_{nm} = \epsilon_n \delta_{nm} + \frac{1}{2} \sum_k \left( \frac{V_{nk} V_{km}}{\epsilon_n - \epsilon_k} - \frac{V_{nk} V_{km}}{\epsilon_k - \epsilon_m} \right), \quad (3.8)$$

donde  $V_{nm} = \langle n | V | m \rangle$  es el acople entre los estados  $|n\rangle$  y  $|m\rangle$  de  $H_0$  a través de  $V$  involucra la suma sobre todos los estados auxiliares  $|k\rangle \neq \{|n\rangle, |m\rangle\}$ ,  $V_{nk}$  son estados virtuales usados para las transiciones a segundo orden.  $\epsilon_n$  son las energías propias de  $H_0$  correspondientes a los estados de interacciones (estados con una partícula por sitio de red). Las energías de los estados de la base de Fock se calculan usando la ecuación (3.6).

Al aplicar esto a nuestra base de Fock para  $L = N = 2$  (dos partículas, dos sitios) obtenemos la energía que caracteriza a cada estado. Tomemos como ejemplo el estado  $|10, 01\rangle$ , en esta descripción los dos primeros parámetros son las partículas que ocupan la banda inferior  $a$  de cada sitio respectivamente, mientras los dos siguientes son los de la banda superior  $b$ , así, este estado posee una partícula en el primer sitio en la banda  $a$  y una partícula en la banda  $b$  del segundo sitio. Vemos entonces que,  $n_1^a = 1$ ,  $n_2^a = 0$ ,  $n_1^b = 0$ ,  $n_2^b = 1$ . Sustituyendo estos valores en (3.6) Tenemos la energía para este estado  $E[|10, 01\rangle] = 3F + U$ .

Hacemos lo mismo con toda la base ordenando  $\epsilon_n$  como sigue

$n$	$ n_1^a n_2^a, n_1^b n_2^b\rangle$	$\epsilon_n$
1	$ 11, 00\rangle$	$3F + U - \Delta$
2	$ 01, 10\rangle$	$3F + U$
3	$ 10, 01\rangle$	$3F + U$
4	$ 00, 11\rangle$	$3F + U + \Delta$
5	$ 20, 00\rangle$	$2F + 2U - \Delta$
6	$ 02, 00\rangle$	$4F + 2U - \Delta$
7	$ 00, 20\rangle$	$2F + 2U + \Delta$
8	$ 00, 02\rangle$	$4F + 2U + \Delta$
9	$ 10, 10\rangle$	$2F + 3U$
10	$ 01, 01\rangle$	$4F + 3U$

Cuadro 3.1: Energías para la base de Fock en SW

Notemos ahora que  $\epsilon_2 = \epsilon_3$  pero se muestra que  $V_{2,3} = 0$  ya que no existe acople entre los estados  $|01, 10\rangle$  y  $|10, 01\rangle$  a través de  $V$  ergo este término no se incluye en la ecuación (3.8). Teniendo las energías definidas, procedemos a encontrar el segundo término de la parte (3.8) construyendo los operadores para cada posible transición virtual en cada salto dentro de la dinámica de interés (movilizarse o saltar entre los estados de una partícula por sitio). Por ejemplo, para un salto entre los estados  $|01, 10\rangle \rightarrow |00, 11\rangle$  tenemos las transiciones virtuales  $|00, 20\rangle$ ,  $|10, 10\rangle$  y  $|10, 01\rangle$  construyamos el operador de transición para  $|01, 10\rangle \rightarrow |00, 20\rangle \rightarrow |00, 11\rangle$  como sigue: Las energías de los estados involucrados son  $\epsilon_3$ ,  $\epsilon_7$  y  $\epsilon_4$  según el cuadro 3.1. Recordemos que



para ir de un estado a otro solo movilizamos una partícula usando los operadores de destrucción y creación ( $\alpha_l$  y  $\alpha_l^\dagger$ ).

En nuestro ejemplo necesitamos movilizar la partícula de la banda  $a$  del segundo sitio al primer sitio de la banda  $b$  con el operador  $\sqrt{2}C_+b_1^\dagger a_2$ , el factor  $C_+$  corresponde al coste de la transición dipolar debido a movilizar la partícula de la banda inferior del primer sitio a la banda superior del segundo sitio y  $\sqrt{2}$  por construir en un sitio dos partículas. Ahora, estando en  $|00, 20\rangle$  saltamos a  $|00, 11\rangle$  por medio del operador  $\sqrt{2}J_b b_2^\dagger b_1$ , siendo  $J_b$  el factor para movernos entre los sitios de las bandas superiores y  $\sqrt{2}$  aparece por destruir en un sitio con dos partículas. La figura 3.5 ilustra el anterior proceso.

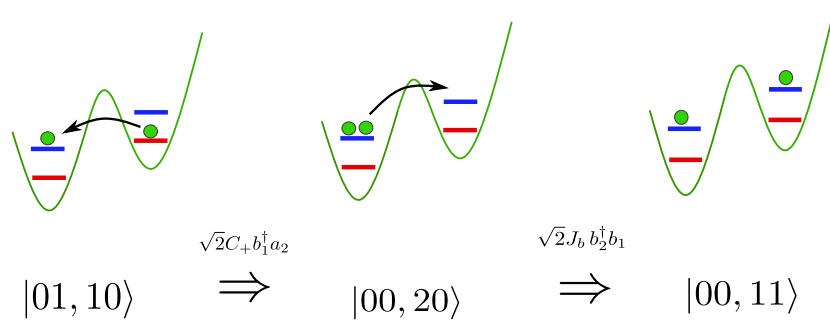


Figura 3.5: Esquema de la transición  $|01, 10\rangle \rightarrow |00, 20\rangle \rightarrow |00, 11\rangle$  y los operadores involucrados en el proceso

Teniendo en cuenta el factor de diferencia energética en cada estado dado por la ecuación 3.8 tenemos que el operador de transición para  $|01, 10\rangle \rightarrow |00, 20\rangle \rightarrow |00, 11\rangle$  es

$$\left( \frac{2J_b \cdot C_+}{F - U - \Delta} - \frac{2J_b \cdot C_+}{F - U} \right) b_2^\dagger b_1 b_1^\dagger a_2 . \quad (3.9)$$

El operador de transición puede reescribirse gracias a la definición de los operadores de creación y destrucción, puesto que operadores de diferentes sitios y diferentes bandas conmutan, mientras que para operadores de un mismo sitio se tiene  $\alpha_l \alpha_l^\dagger = (n_l^\alpha + 1)$ . Por último redefinimos las constantes  $J_a = J$ ,  $J_b = -J$ ,  $C_+ = C_- = C$  como en [5]. En ese caso 3.9 toma la forma

$$- \left( \frac{2J \cdot C}{F - U - \Delta} + \frac{2J \cdot C}{F - U} \right) b_2^\dagger a_2 (n_1^b + 1) .$$

Hacemos lo mismo para el resto de estados que median la transición  $|01, 10\rangle \rightarrow |00, 11\rangle$  y se repite el proceso con cada opción de transición de estados del sistema de interés. Solo basta con construir los elementos triangular superior o triangular inferior en la matriz de transición del sistema, luego sumamos todo y tanto la suma de términos diagonales y no diagonales dependen de operadores  $n_l^\alpha$  pero los no diagonales dependen además de operadores  $a_l^\dagger b_{l+1}$ ,  $b_l^\dagger a_{l+1}$  y sus adjuntos. Esto tiene sentido porque los elementos diagonales son transiciones de un estado a él mismo lo que implica operadores de creación y destrucción en mismas bandas y mismos sitios. No así para los elementos que están por fuera de la diagonal. Resaltemos que a diferencia del formalismo de proyectores, aquí se admiten transiciones de  $P$  usando un posible estado virtual en  $P$ .

Nuestros estados de interés corresponden a 1, 2, 3 y 4 del cuadro 3.1 sujetos a la condición  $n_l^a + n_l^b = 1$ . Realizamos el mismo cambio de representación a una base de qbits como muestra la figura 3.4. Usamos la definición  $n_l^b - n_l^a = \sigma_l^z$ . Nuestro hamiltoniano efectivo en la construcción SW debe ser modificado para reproducir una dinámica de espines reescribiendo los operadores con la ecuación (3.4). El hamiltoniano total debería ser una suma de todas estas transiciones. Pero hay que tener cuidado en este caso ya que, por ejemplo, el operador que acabamos de encontrar es  $b_2^\dagger a_2 (n_1^b + 1)$  para la transición  $|01, 10\rangle \rightarrow |00, 20\rangle \rightarrow |00, 11\rangle$ , también aparece también para la transición  $|11, 00\rangle \rightarrow |10, 10\rangle \rightarrow |10, 01\rangle$  multiplicado con un factor diferente. Es decir que un mismo operador es capaz de generar dos transiciones diferentes en  $P$  usando diferentes estado virtuales en  $Q$ . Al sumar todos estos términos se genera redundancia de suma, que conduce a elementos de matriz incorrectos (diferentes a los obtenidos en ecuación 3.8). Además este operador no es el único que se repite. Puesto que cambiamos la representación de la base de Fock a espines la solución a este inconveniente se encuentra aplicando proyectores de espín a los estados inicial y final de la transición. Estos proyectores toman la forma

$$\begin{aligned} P_{\uparrow\uparrow} &= \sigma_1^\uparrow \sigma_2^\uparrow, \\ P_{\downarrow\downarrow} &= \sigma_1^\downarrow \sigma_2^\downarrow, \\ P_{\uparrow\downarrow} &= \sigma_1^\uparrow \sigma_2^\downarrow, \\ P_{\downarrow\uparrow} &= \sigma_1^\downarrow \sigma_2^\uparrow, \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma^\uparrow &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1 + \sigma_l^z}{2} = n_l^b, \\ \sigma^\downarrow &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - \sigma_l^z}{2} = n_l^a, \end{aligned}$$

Utilicemos como ilustración las dos transiciones mencionadas donde los operadores se repiten. Empecemos con  $|01, 10\rangle \rightarrow |00, 20\rangle \rightarrow |00, 11\rangle$ . Puesto que  $|01, 10\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$  y  $|00, 11\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$  entonces

$$\begin{aligned} \langle 00, 11 | b_2^\dagger a_2 (n_1^b + 1) | 01, 10 \rangle &\rightarrow \langle 00, 11 | P_{\uparrow\uparrow} [b_2^\dagger a_2 (n_1^b + 1)] P_{\uparrow\downarrow} | 01, 10 \rangle \\ &= \langle \uparrow\uparrow | P_{\uparrow\uparrow} [\sigma_2^+ (n_1^b + 1)] P_{\uparrow\downarrow} | \uparrow\downarrow \rangle \\ &= \langle \uparrow\uparrow | \sigma_1^\uparrow \sigma_2^\uparrow [\sigma_2^+ (n_1^b + 1)] \sigma_1^\uparrow \sigma_2^\downarrow | \uparrow\downarrow \rangle \\ &= \langle \uparrow\uparrow | n_1^b n_2^b [\sigma_2^+ (n_1^b + 1)] n_1^b n_2^a | \uparrow\downarrow \rangle. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ahora usando las formas matriciales de  $n^a = (1 - \sigma^z)/2$  y  $\sigma^+$  encontramos las siguientes

relaciones

$$\begin{aligned}
\sigma^+ n^a &= \sigma^+, \\
\sigma^+ n^b &= 0, \\
\sigma^- n^a &= 0, \\
\sigma^- n^b &= \sigma^-, \\
n^a \sigma^+ &= 0, \\
n^b \sigma^+ &= \sigma^+, \\
n^a \sigma^- &= \sigma^-, \\
n^b \sigma^- &= 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Usando estas relaciones simplificamos (3.11) como

$$\langle \uparrow\uparrow | 2n_1^b \sigma_2^+ | \uparrow\downarrow \rangle. \tag{3.13}$$

Encontremos ahora el operador para la transición  $|11, 00\rangle \rightarrow |10, 10\rangle \rightarrow |10, 01\rangle$  de la misma forma teniendo en cuenta que  $|11, 00\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$  y  $|10, 01\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$  hacemos lo mismo

$$\langle 10, 01 | b_2^\dagger a_2 (n_1^b + 1) | 00, 11 \rangle \rightarrow \langle 10, 01 | P_{\downarrow\uparrow} [b_2^\dagger a_2 (n_1^b + 1)] P_{\uparrow\uparrow} | 00, 11 \rangle = \dots = \langle \downarrow\downarrow | n_1^a \sigma_2^+ | \uparrow\downarrow \rangle.$$

Estos dos nuevos operadores aseguran siempre que se sumen elementos de matriz de transiciones diferentes. Luego de sumar, reescribir, organizar y simplificar términos obtenemos un hamiltoniano efectivo para espines de la forma

$$\begin{aligned}
H_{\text{SW}} &= -\eta_1 (\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z) \\
&+ \eta_2 \sigma_1^z + \eta_3 \sigma_2^z + \eta_4 \\
&+ h_1 (\sigma_1^+ + \text{h.c.}) \\
&+ h_2 (\sigma_2^+ + \text{h.c.}) \\
&+ h_3 (\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^+ + \text{h.c.}) \\
&+ h_4 (\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \text{h.c.}) \\
&+ h_5 (\sigma_1^z \otimes \sigma_2^+ + \text{h.c.}) \\
&+ h_4 (\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^z + \text{h.c.}) .
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Donde todas estas constantes están definidas en el apéndice D.1. Muchas de estas presentan indeterminaciones para algunos valores de los parámetros  $F$ ,  $\Delta$  y  $U$ . En el apéndice D.2 se hace un estudio detallado en dos de estos parámetros ( $\Delta$ ,  $F$ ), donde se encuentra que las indeterminaciones pertenecen a un rango de valores en donde se cruza la energía, la transformación es valida por intervalos separados por estas indeterminaciones. En este trabajo estamos mas interesados en estudiar la dinámica del sistema con respecto a  $F$  recordando que este parámetro

corresponde a la fuerza externa a la que es sometida la red. Fijando los valores para  $\Delta$  y  $U$  [5] en apéndice D.2 se encuentra el valor mínimo de  $F$  para los cuales la Schrieffer-Wolff se mantiene en el rango de validez.

En la siguiente paso ahora que se tienen las construcciones efectivas es poner a prueba la evolución estudiando los valores medios de los observables bajo algunas condiciones como por ejemplo la inclinación de la red o variación en los parámetros de las interacciones. Esto con el objetivo de determinar cual de las dos dinámicas efectivas es la que mejor modela una dinámica de pseudo-espines. Los resultados serán comparados con la dinámica completa para el sistema Wannier-Stark con  $N = L = 2$ .

### 3.3. Análisis y comparación de los modelos

Un “hamiltoniano efectivo” es un hamiltoniano que actúa en un espacio reducido y solo describe una parte del espectro de valores propios del hamiltoniano verdadero (más completo). Estamos enfocados en describir la dinámica de sitios con una partícula y dos posibles niveles de ocupación los cuales son asociados a estados de espines acoplados. Nuestro sistema Wannier-Stark con  $N = L = 2$  permite definir de forma similar estos estados de espines pero están inmersos en una dinámica mas grande. Es por eso que recurrimos a la descripción efectiva. Usaremos dos modelos para sistemas independientes del tiempo, la ganancia esta en determinar cual de los dos es la mejor descripción.

En la sección anterior se desarrollaron los términos matriciales correspondientes a construcciones efectivas para dos modelos. En ambos el punto de partida fue el hamiltoniano Bose-Hubbard para dos bandas (2.20) que es independiente del tiempo. Para aplicar el modelo del formalismo de proyectores primero se aplicó la transformación de gauge (3.1) sobre el hamiltoniano (2.20) que lo dejó con dependencia temporal y tres variedades energéticas de estados donde la menor corresponde a estados de una partícula como se hace en [2]. En general el formalismo de proyectores es aplicado a sistemas independientes del tiempo pero gracias a las características que presenta el espacio de Hilbert luego de la transformación nos vimos tentados a usar este modelo. Por último la variedad correspondiente a estados de una partícula es asociada a la base de dos pseudo-espines acoplados ergo la descripción efectiva es un hamiltoniano de espines. Schrieffer-Wolff se construyó directamente sobre (2.20) donde se usaron los mismos estados de una partícula por sitio como sistema de interés que a su vez fueron reescritos en estados de pseudo espines acoplados. El modelo Schrieffer-Wolff es una generalización del formalismo de proyectores lo que permitirá luego del estudio determinar que tan factible es esta técnica en modelos dependientes del tiempo. Primero pondremos en contraste cada construcción. Comparamos a continuación término a término las dos construcciones

Hamiltoniano efectivo en el formalismo de proyectores

$$\begin{aligned}
 H_{\text{PQ}} = & \frac{5}{2}\lambda (\alpha^2 - 1) \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \\
 & + \frac{5}{2}\lambda (1 - \alpha^2) \sigma_1^z - 5\lambda (1 + \alpha^2) \\
 & + (FC_0 + 3\lambda\alpha\sigma_1^z) \otimes (\sigma_2^+ e^{it\Delta} + \text{h.c.}) \\
 & + (\sigma_1^+ e^{it\Delta} + \text{h.c.}) \otimes (FC_0 + 3\lambda\alpha\sigma_2^z) \\
 & + \lambda (\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \text{h.c.}) \\
 & - \lambda\alpha^2 (\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^+ e^{i2t\Delta} + \text{h.c.}) .
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Donde  $\lambda = 2J^2/U$ ,  $\alpha = FC/J$  y  $F$  la fuerza externa.

Hamiltoniano efectivo en la transformación Schrieffer-Wolff

$$\begin{aligned}
 H_{\text{SW}} = & -\eta_1 (\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z) \\
 & + \eta_2 \sigma_1^z + \eta_3 \sigma_2^z + \eta_4 \\
 & + h_1 (\sigma_1^+ + \text{h.c.}) \\
 & + h_2 (\sigma_2^+ + \text{h.c.}) \\
 & + h_3 (\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^+ + \text{h.c.}) \\
 & + h_4 (\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \text{h.c.}) \\
 & + h_5 (\sigma_1^z \otimes \sigma_2^+ + \text{h.c.}) \\
 & + h_6 (\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^z + \text{h.c.}) .
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Donde  $\eta_1, \dots, \eta_4$  y  $h_1, \dots, h_6$  están definidas en el apéndice (D.1).

Recordemos que  $\sigma_l^z$  produce la proyección del espín en el sitio  $l$  mientras que el operador  $\sigma_1^+$  actúa sobre el primer sitio enviando una partícula del nivel inferior al nivel superior del mismo sitio, su adjunto hará lo contrario.  $H_{\text{PQ}}$  parece ser muy diferente en cuanto a la estructura pero se puede notar que los operadores en ambos hamiltonianos efectivos son comunes salvo las constantes y en  $H_{\text{PQ}}$  hace falta un proceso si se encuentran en  $H_{\text{SW}}$  el término  $\sigma_2^z$  que produce la proyección del espín en el segundo sitio de red.

Veamos que interpretación tienen cada uno de los términos que conforman estas construcciones como sigue

### 3.4. Evolución del espín por sitio para los modelos

Habiendo definido las dos construcciones efectivas, la dinámica será entonces computada a través de la solución directa de la ecuación de Schrödinger para un estado  $|\psi(t)\rangle$

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H_{\text{eff}} |\psi(t)\rangle , \tag{3.17}$$

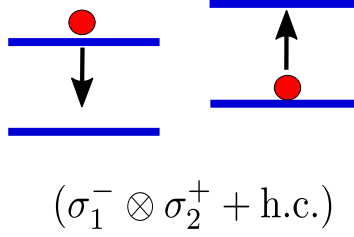


Figura 3.6: Término del hamiltoniano que genera el ascenso y descenso de partículas en el primer y segundo sitio

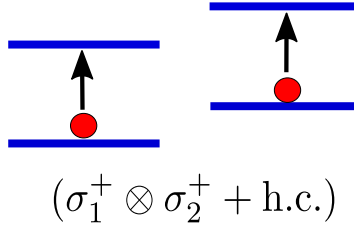


Figura 3.7: Término del hamiltoniano que media el ascenso y de partículas en el primer y segundo sitio

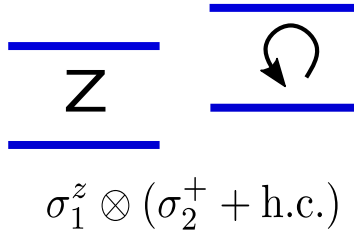


Figura 3.8: Término del hamiltoniano que media la proyección del espín en el primer sitio y segundo sitio presenta una oscilación de Rabi en el segundo

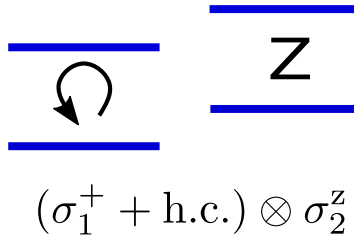


Figura 3.9: Término del hamiltoniano que presenta una oscilación de Rabi en el primer sitio y genera la proyección del espín en el segundo sitio

Al ser esta una ecuación lineal la evolución en el tiempo corresponde a la acción del operador evolución temporal  $U(t, t_0)$  tal que  $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$ , este operador obedece una versión de la ecuación de Schrödinger para operadores:  $i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H_{\text{eff}}U(t, t_0)$ . Basta entonces definir el estado inicial dentro de la base de los 4 estados de interés ( $|\downarrow, \downarrow\rangle, |\downarrow, \uparrow\rangle, |\uparrow, \downarrow\rangle, |\uparrow, \uparrow\rangle$ ).

En el campo de las redes ópticas y átomos fríos uno de los conjuntos de estados iniciales

mas usados debido a los aportes son aquellos que presentan una sola partícula por sitio en el nivel más bajo. Este tipo de estados son muy accesibles puesto que se pueden preparar experimentalmente, tal es el caso del Mott-insulator o estado Mott, representado por la base de Fock  $|\psi_0\rangle = |111\dots, 000\dots\rangle$ . Este es normalmente el estado usado en muchos experimentos [9, 42]. Para nuestro estudio basado en el sistema  $N = L = 2$  este estado inicial es representado por  $|11, 00\rangle$  que en la base de espines corresponde a  $|\downarrow, \downarrow\rangle$ .

Teniendo dos descripciones para dinámica de espines el observable mas relevante será la proyección del espín por sitio determinado por la matriz de Pauli  $z$  donde  $l$  indexa los sitios de la red. El valor esperado de la proyección se calculara de la siguiente manera

$$\langle \sigma_l^z \rangle = \langle \psi(t) | \sigma_l^z | \psi(t) \rangle / \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle, \quad (3.18)$$

A continuación se presenta una serie de comparaciones entre las dos construcciones efectivas teniendo en cuenta que  $H_{SW}$  corresponde a la transformación schrieffer wolff y  $H_{PQ}$  a la construcción por formalismo de proyectores. Ambas son contrastadas con en hamiltoniano real Bose-Hubbard tomado como  $H_{Total}$ . Inicialmente tomaremos valores fijos de  $F$  y mostramos como varia respecto al tiempo la proyección de espín en el primer y segundo sitio de los dos modelos efectivos comparándolos con la dinámica real (Hamiltoniano Bose-Hubbard).

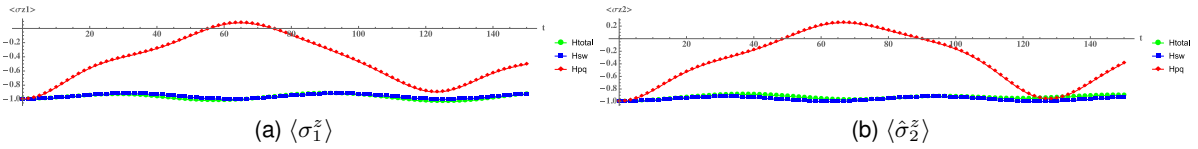


Figura 3.10: Evolución del espín con respecto a tiempos cortos y  $F = \Delta$  en los sitios  $L = 1$  y  $L = 2$  para  $H_{SW}$  (línea azul) y  $H_{PQ}$  (línea roja) comparados con la dinámica real (línea verde). Con  $U = 0,034$ ,  $J = 0,006$

La figura 3.10 muestra la proyección del espín para el primer y segundo sitio de la red para las dos construcciones efectivas y son comparadas con la dinámica real lo que llamamos  $H_{Total}$  correspondiente al hamiltoniano Bose-Hubbard (véase ecuación 2.20). Aquí se toma el valor fijo  $F = \Delta$  (inclinación de la red) y se evidencia por completo que la construcción dependiente del tiempo realizada por medio del formalismo de proyectores no aproxima al comportamiento real pues es claro que para el valor de inclinación tomado la proyección del espín en el hamiltoniano Bode-Hubbard para los dos sitios fluctúa muy débil alrededor de  $-1$  lo que indica que las partículas se encuentran distribuidas en la bada inferior de cada sitio por el contrario la proyección de  $H_{SW}$  se va incrementando a medida que avanza el tiempo como consecuencia las partículas se encuentran en las bandas superiores. El hamiltoniano  $H_{SW}$  se ajusta al comportamiento real de mejor manera para este valor de  $F$  dejando buenas perspectivas por parte de esta construcción. A continuación tomaremos otro valor de  $F$  y comparemos la proyección en los mismos sitios.

Al cambiar  $F = 1,7\Delta$  nos encontramos con que el formalismo de proyectores no representa una aproximación efectiva de nuestro modelo de espines por la alta discrepancia entre sus medidas y las arrojadas por la dinámica real (Bose-Hubbard) lo deja en evidencia la figura 3.4. El formalismo efectivo Schrieffer-Wolff deja claro que es el que mejor se ajusta a la dinámica que queremos encontrar, difiere de forma marcada con la dinámica real a tiempos largos pues

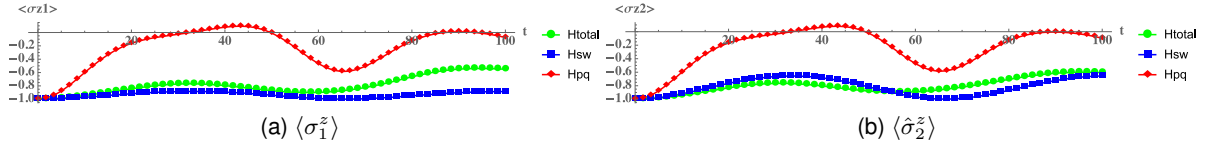


Figura 3.11: Evolución del espín con respecto a tiempos cortos y  $F = 1,7\Delta$  en los sitios  $L = 1$  y  $L = 2$  para  $H_{SW}$  (línea azul) y  $H_{PQ}$  (línea roja) comparados con la dinámica real (línea verde). Tomando además  $U = 0,034$ ,  $J = 0,006$ .

la figura 3.4 muestra que para los dos sitios la proyección  $H_{Total}$  se separa de  $H_{SW}$  a medida que avanza el tiempo lo que establece que la construcción Schrieffer-Wolff es una buena aproximación a tiempos cortos. En las evoluciones anteriores fijamos el valor de  $F$  y medimos la proyección del espín en el tiempo. Veamos que le ocurre a la proyección cuando variamos  $F$ .

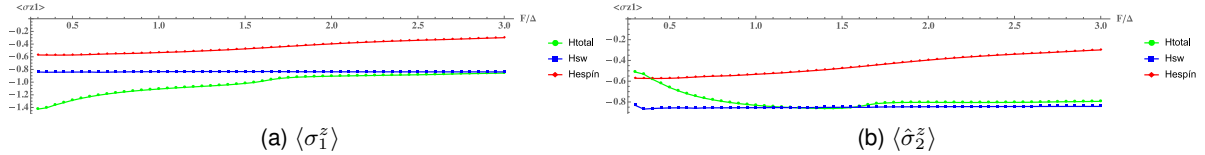


Figura 3.12: Evolución del espín con respecto a  $F$  en los sitios  $L = 1$  y  $L = 2$  para  $H_{SW}$  (línea azul) y  $H_{PQ}$  (línea roja) comparados con la dinámica real (línea verde). Con  $U = 0,034$ ,  $J = 0,006$ . Aquí los tiempos de evolución son los mismos  $t = 140$ .

Al variar  $F$  queda descartado por completo el formalismo de proyectores como modelo que describa la dinámica de espines ya que los resultados muestran que su diferencia es muy marcada con respecto a los comportamientos de  $H_{SW}$  (línea azul) y  $H_{Total}$  (verde). En un principio las proyecciones de  $H_{SW}$  y  $H_{Total}$  difieren en un rango de  $F$  entre  $0\Delta$  y  $1,6\Delta$  esto debido a que la dinámica total es mixta entre 10 estados de la base de Fock, esto es reflejado en la proyección para  $F$  pequeños donde la inclinación de la red no difiere mucho como consecuencia existen en gran medida estados que contienen dos partículas en un mismo sitio y la proyección de  $H_{Total}$  así lo muestra ya que sus valores pueden fluctuar entre  $-2$  y  $2$  por que en esencia la medida de proyección es una medida de población para cada sitio, mientras que  $H_{SW}$  describe solo la dinámica de solo 4 estados (los que contienen una partícula por sitio) por ende su proyección solo toma valores entre  $-1$  y  $1$ . La figura 3.12 muestra que a medida que  $F$  aumenta (mayor inclinación de red) las proyecciones de  $H_{SW}$  y  $H_{Total}$  se ajustan y lo que ocurre es que entre mas inclinada este la red, mas confinada está la partícula en determinado sitio. Luego las partículas en los sitios se comportan como espines que no interactúan.

Las medidas de correlación nos da información acerca de que tanto se afecta una medida luego de haber realizado otra. En tal caso mediremos la correlación  $\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle$  solo para el modelo Schrieffer-Wolff ya que los datos arrojados nos descarta el formalismo de proyectores como descripción efectiva de espines. Recordemos que existen resonancias de energía entre los estados de Fock para algunos valores de  $F$  como lo muestra el apéndice D.2, mediremos las correlación para dos valores de  $F$  cercanos a dos resonancias.

Los valores de  $F = 1,34\Delta$  y  $F = 1,68\Delta$  presentan resonancia como consecuencia la trans-



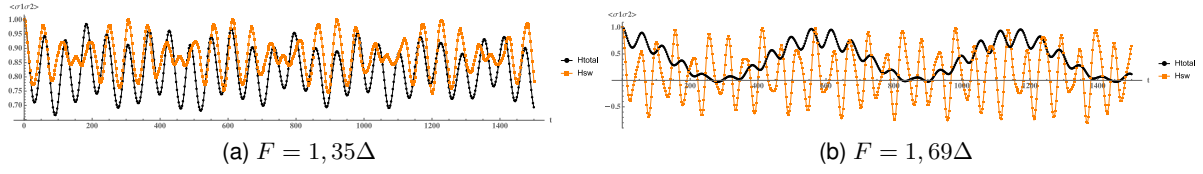


Figura 3.13: Medida de la correlación  $\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle$  para dos valores de  $F$  en  $H_{SW}$  (línea naranja) y  $H_{Total}$  (línea negra)

formación Schrieffer-Wolff no aplica para estos valores pero la evolución si existe por fuera de estos como se muestra en la figura donde la proyección para el valor  $F = 1,7\Delta$  es muy similar al comportamiento real. La figura 3.13 muestra que cerca de la primera resonancia nombrada subfigura 3.13a la medida de correlación en para  $H_{SW}$  es similar a la medida de  $H_{Total}$  donde para ambas la correlación es alta. Si se aumenta  $F$  pasando cerca de la segunda resonancia ( $F = 1,68\Delta$ ) en la figura 3.13b para el comportamiento real sigue habiendo correlación entre las medidas pero no en Shrieffer-Wolff ya que presenta altas fluctuaciones en el tiempo aumenta la amplitud de valores en la proyección.

A continuación aplicaremos a nuestro modelo Schrieffer-Wolff dos medidas de entrelazamiento en función del tiempo. Estas medidas son Negatividad  $\rightarrow N(\rho) = \sum_i \frac{|\lambda_i| - \lambda_i}{2}$  y entropía Von Neumann  $\rightarrow S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \ln(\lambda_i)$  y lo haremos cerca de las resonancias marcadas anteriormente en las que se calculó correlaciones en figura 3.13.

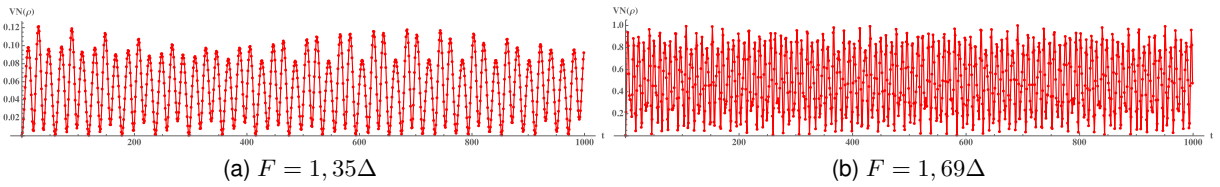


Figura 3.14: Medida de la entrelazamiento Von Neumann para dos valores de  $F$  en  $H_{SW}$

Las medidas muestran que cerca a las resonancias los estados de interés presentan entrelazamiento. Para un valor de  $F = 1,69\Delta$  el entrelazamiento es alto comparado con el valor de  $F = 1,35\Delta$  lo nota estados no separables cerca a este valor. Para tener una visión amplia de lo que ocurre con el entrelazamiento, se midió el mismo para diferentes valores de  $F$  plasmado en la siguiente gráfica

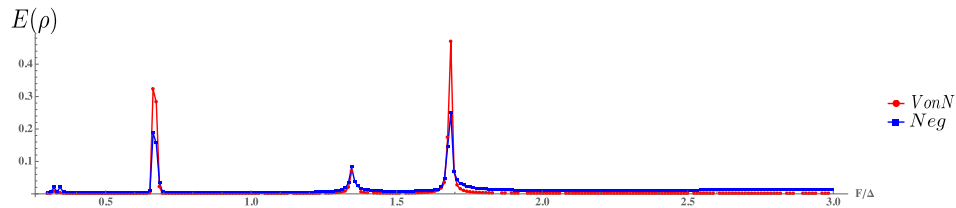


Figura 3.15: Comparación de las medidas de entrelazamiento Von Neumann(línea roja) y Negatividad(línea azul) respecto a  $F$

La figura 3.15 compara las dos medidas de entrelazamiento y da como resultado que los estados presentan entrelazamiento cerca a las resonancias y es más marcado a medida que  $F$  aumenta. la última resonancia es precisamente el valor  $F = 1,68$  donde se presenta el mayor entrelazamiento, a partir de aquí para  $F$  mayor a  $2\delta$  el sistema ya no es entrelazado.

## Capítulo 4

# Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se estudió el problema Wannier-Stark por medio del hamiltoniano de Bose-Hubbard para dos bandas y dos sitios con el fin de reproducir la dinámica efectiva correspondiente a estados de una partícula en un solo sitio de red asociando esta característica a pseudo-espines ergo la construcción efectiva sería un modelo de espines sujeto a una fuerza externa. Para ello se usaron dos técnicas el formalismo de proyectores y la transformación Schrieffer-Wolff (SW) cada una aplicada en un marco diferente. El formalismo de proyectores fue usado en un hamiltoniano dependiente del tiempo ya que los estados que contienen una sola partícula quedan confinados en una misma variedad energética luego de aplicarse una transformación de calibre sobre el hamiltoniano Bose-Hubbard. La transformación Schrieffer-Wolff se aplicó directamente sobre el hamiltoniano Bose-Hubbard independiente del tiempo. Ambas construcciones poseen términos a primer orden correspondientes a las energías de los estados y términos a segundo orden en los que se median las transiciones del subespacio que contiene los estados de interés a través de estados virtuales pertenecientes al espacio residual en sus respectivos marcos. La conexión entre el sistema de partículas y el modelo de espín lo proporciona la condición de los estados de interés, puesto que poseen una partícula por sitio la ubicación de esta en las bandas define el pseudo-espín. Finalmente las construcciones presentan términos similares para tratamiento de espines como por ejemplo la proyección y el operado que invierte el espín.

La dinámica se midió con el valor medio de las proyecciones por sitio para los diferentes valores de fuerza externa comparando ambas construcciones efectivas con el comportamiento real simulado con el hamiltoniano Bose-Hubbard inicial. Las evoluciones en el tiempo mostraron discrepancias entre los dos formalismos y al comparar con el comportamiento real se estableció que el formalismo de proyectores no es un buen modelo. Esto no es una sorpresa ya que inicialmente el formalismo de proyectores es aplicado generalmente a hamiltonianos independientes del tiempo, el estudio corrobora que este caso no es la excepción. De otro lado la transformación SW fue la que más se ajustó al comportamiento real en tiempos de evolución cortos para valores menores a  $F = 2$ , para valores mayores de  $F$  el comportamiento se ajusta a tiempos largos, esto debido a que el valor de inclinación de la red es lo suficiente como para confinar una partícula por sitio ergo el comportamiento para ambos casos (SWT y real) es el mismo ya que simula un espín aislado. Se tomaron medidas de correlación para el modelo SW y medidas de entrelazamiento que revelaron estados altamente entrelazados cerca de algunas resonancias que parecen dentro de la transformación SW para determinados valores del campo externo, fue-

ra de estos valores la transformación sigue aplicando y el comportamiento en el rango donde aparece estas indeterminaciones se ajusta al real a cortos tiempos como ya mencionamos.

## Apéndice A

### Formalismo de proyectores

No es muy común en óptica cuántica usar el enfoque no hermítico y el formalismo de proyectores. Describiremos brevemente sin rigurosidad la esencia del método, para una lectura mas detallada del método verifique [15] Generalmente es posible dividir el espacio de Hilbert de un sistema cuántico con un hamiltoniano hermítico  $H$  en dos proyectores ortogonales seleccionados arbitrariamente,  $P$  y  $Q$  los cuales satisfacen las propiedades de completéz

$$1 = P + Q, \quad (\text{A.1})$$

y ortogonalidad

$$PQ = QP = 0, \quad (\text{A.2})$$

al ser  $P$  y  $Q$  proyectores, usando (A.1) y (A.2) se cumple que

$$PP = P, \quad QQ = Q. \quad (\text{A.3})$$

Con ayuda de la completéz (A.1) podemos dividir la solución estacionaria de la ecuación de Schrödinger

$$H\psi = E\psi, \quad (\text{A.4})$$

en dos partes

$$\psi = P\psi + Q\psi = \psi_P + \psi_Q, \quad (\text{A.5})$$

y reescribir (A.4) como sigue

$$(P + Q)H(P + Q)(\psi_P + \psi_Q) = E(\psi_P + \psi_Q), \quad (\text{A.6})$$

Ya que en virtud de (A.2),  $P\psi_Q = 0$ ,  $Q\psi_P = 0$  podemos escribir (A.6) como sigue

$$(H_{PP} + H_{QQ})\psi_P + (H_{QQ} + H_{PQ})\psi_Q = E(\psi_P + \psi_Q). \quad (\text{A.7})$$

Donde

$$H_{PP} = PHP, \quad H_{QQ} = QHQ, \quad H_{PQ} = PHQ, \quad H_{QP} = QHP.$$

La ecuación (A.7) es equivalente a la ecuación de Schrödinger (A.4).

Multiplicando (A.7) desde la izquierda por proyectores  $P$  y  $Q$  obtenemos dos ecuaciones acopladas para  $\psi_P$  y  $\psi_Q$ :

$$(H_{PP} - E)\psi_P = -H_{PQ}\psi_Q, \quad (\text{A.8})$$

$$(H_{QQ} - E)\psi_Q = -H_{QP}\psi_P. \quad (\text{A.9})$$

Si eliminamos de (A.8) y (A.9) uno de los subespacios de estados, podemos obtener una ecuación para una parte de la función de onda (A.5). Por ejemplo si eliminamos de (A.9) el subespacio  $Q$ , la ecuación para la función de onda en el subespacio  $P$  toma la forma

$$H_{\text{eff}}(E)\psi_P = E\psi_P \quad (\text{A.10})$$

Donde el hamiltoniano efectivo dependiente de la energía

$$H_{\text{eff}}(E) = H_{PP} + H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP} \quad (\text{A.11})$$

Proyecta el espacio de Hilbert en el subespacio  $P$

## Apéndice B

# Transformación Schrieffer-Wolff

En mecánica cuántica, la transformación Schrieffer-Wolff es una transformación unitaria que diagonaliza perturbativamente a primer orden en la interacción el hamiltoniano de un sistema. Estas transformaciones unitarias son una herramienta útil para construir una mejor interpretación a un problema inicialmente difícil de tratar. En ocasiones esta transformación pone a la vista relaciones o conexiones entre los sistemas físicos que inicialmente no se podrían haber pensado. Hablaremos brevemente de esta transformación en esta sección. Para una revisión detallada de la transformación Schrieffer-Wolff se recomienda [16].

### B.1. Breve derivación

Consideremos un sistema cuántico cuyo hamiltoniano  $\hat{H}$  sea independiente del tiempo de la forma

$$H = H_0 + V, \quad (\text{B.1})$$

donde  $H_0$  es un hamiltoniano con autoestados conocidos  $|m\rangle$  y  $E_m$  sus respectivos autovalores, y  $V$  es un término perturbativo. Partimos aplicando una transformación canónica de la forma

$$H_{\text{eff}} = e^S H e^{-S}, \quad (\text{B.2})$$

donde  $S$  es llamado el generador de la transformación. Esta expresión puede ser expandida en  $S$  usando la formula de Baker-Campbell-Hausdorff

$$\hat{H}_{\text{eff}} = H + [S, H] + \frac{1}{2}[S, [S, H]] + \frac{1}{6}[S, [S, [S, H]]] + \dots, \quad (\text{B.3})$$

siendo  $[A, B]$  el conmutador entre operadores  $A$  y  $B$ . Reescribiendo (B.3) en términos de  $H_0$  y  $V$  tenemos

$$H_{\text{eff}} = H_0 + V + [S, H_0] + [S, V] + \frac{1}{2}[S, [S, H_0]] + \frac{1}{2}[S, [S, V]] + \dots$$

El Hamiltoniano se puede hacer diagonal a primer orden en  $V$  seleccionando el generador  $S$  de modo que  $V = -[S, H_0]$ . Puesto que solo nos interesa la descripción de los procesos de segundo orden, podemos trunca la expansión hasta ese orden quedando así

$$H_{\text{eff}} = H_0 + \frac{1}{2}[S, V]. \quad (\text{B.4})$$

Ahora solo basta introducir el hamiltoniano del problema específico y calcular el generador respectivo. Construyamos los elementos matriciales de  $H_{\text{eff}}$  usando los autoestados propios de  $H_0$ .

$$\langle n|H_{\text{eff}}|m\rangle = E_{n,m}\delta_{nm} + \frac{1}{2}(\langle n|SV|m\rangle - \langle n|VS|m\rangle). \quad (\text{B.5})$$

Los elementos de la matriz de  $SV$  y  $VS$  pueden evaluarse introduciendo la suma de identidad  $\sum_k |k\rangle\langle k| = 1$  en la ecuación (B.9) podemos escribir

$$\langle n|H_{\text{eff}}|m\rangle = E_{n,m}\delta_{nm} + \frac{1}{2} \sum_k (\langle n|S|k\rangle\langle k|V|m\rangle - \langle n|V|k\rangle\langle k|S|m\rangle). \quad (\text{B.6})$$

Puesto que se definió  $V = -[S, H_0]$ , veamos como actúan los autoestados aquí, para ello tenemos

$$\langle n|V|m\rangle = -\langle n|[S, H_0]|m\rangle = -(\langle n|SH_0|m\rangle - \langle n|H_0S|m\rangle) = (E_n - E_m)\langle n|S|m\rangle. \quad (\text{B.7})$$

Hemos usado el hecho de que  $|n\rangle$  y  $|m\rangle$  son autoestados de  $H_0$  para facilitar la anterior deducción por tanto (B.7) queda

$$\langle n|S|m\rangle = \frac{\langle n|V|m\rangle}{E_n - E_m}. \quad (\text{B.8})$$

Incorporando (B.8) en (B.6) encontramos

$$\langle n|H_{\text{eff}}|m\rangle = E_{n,m}\delta_{nm} + \frac{1}{2} \sum_k \left( \frac{1}{E_n - E_k} - \frac{1}{E_k - E_m} \right) \langle n|V|k\rangle\langle k|V|m\rangle, \quad (\text{B.9})$$

donde el conjunto completo de estados  $k$  introducidos en (B.6) son los estados intermedios o virtuales que permiten la transición del estado  $|n\rangle$  al estado  $|m\rangle$ .



## Apéndice C

# Transformación a operadores de espín

### C.1. Transformación hamiltoniano de espines

La transformación Schrieffer-Wolff es una generalización del formalismo de proyectores, ambas construcciones son usadas para describir la dinámica efectiva del subespacio de menor energía en el espacio de Hilbert del problema (véase B.1 y A). En este trabajo estos formalismos son aplicados de maneras diferentes, en una se aplica Schrieffer-Wolff directamente sobre el hamiltoniano Bose-Hubbard independiente del tiempo y el otra se usa el formalismo de proyectores luego de haber aplicado una transformación gauge sobre el hamiltoniano Bose-Hubbard que lo deja dependiente del tiempo. Estas transformaciones permiten dividir el espacio de Hilbert en dos subespacios  $P$  y  $Q$ , donde los acoples que permiten ir de un subespacio al otro son tomados como las perturbaciones  $V$ . La idea es reproducir la dinámica del subespacio  $P$  de menor energía usando un solo estado virtual es decir transiciones a primer orden en  $V$ . Para este trabajo se utiliza un estado virtual del subespacio  $Q$  que media la transición entre dos estados de  $P$ . El ejemplo usado para el formalismo de proyectores es la transición entre los estados  $|11, 00\rangle \rightarrow |10, 01\rangle$  donde las posibles las transiciones virtuales son  $|20, 00\rangle$ ,  $|10, 10\rangle$  y  $|10, 01\rangle$ . Se Construye el operador para la transición  $|11, 00\rangle \rightarrow |20, 00\rangle \rightarrow |10, 01\rangle$  dado por

$$\frac{2J_a C_+}{E - \varepsilon_{|20,00\rangle}} \hat{b}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2. \quad (\text{C.1})$$

Luego de aplicada la transformación 3.1 en el operador que acabamos de construir y tomando las condiciones  $J_a = J, J_b = -J, C_+ = C_- = C$ , el operador C.1 toma la forma

$$-\frac{J \cdot C}{U/2} (n_1^a + 1) \cdot (b_2^\dagger \{a_2 e^{i\Delta t} + \text{h.c.}\}).$$

Dentro de la matriz de transición en  $P$  este operador se encuentra fuera de la diagonal y tiene esta forma  $(n_1^a + 1) \cdot (b_2^\dagger \{a_2$ , mientras que para la parte diagonal representada por transiciones como por ejemplo  $|11, 00\rangle \rightarrow |11, 00\rangle$  todos los operadores tienen la forma  $(n_l^\alpha + 1)n_m^\alpha + 1$  donde  $\alpha$  puede ser  $a$  ó  $b$  y  $l$  y  $m$  toma los valores 1 ó 2 con combinaciones entre estos. Luego de construir

todos los operadores tanto para la parte diagonal como por fuera de ella usamos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - 2\sigma_l^z}{2} &= n_l^a, \\
 \frac{1 + 2\sigma_l^z}{2} &= n_l^b, \\
 \hat{\sigma}_l^+ &= b_l^\dagger \hat{a}_l, \\
 \hat{\sigma}_l^- &= a_l^\dagger \hat{b}_l.
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

para reescribir estos operadores en términos de operadores de espín. Encontrando así que los elementos en la diagonal corresponden a combinaciones lineales entre las matrices  $\sigma_1^z, \sigma_2^z, \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$  y la identidad en  $Id_{4 \times 4}$ . Mientras que las entradas no diagonales son combinaciones lineales de las matrices  $\sigma_1^+, \sigma_2^+, \sigma_1^+ \otimes \sigma_2^+, \sigma_1^+ \otimes \sigma_2^-, \sigma_1^+ \otimes \sigma_2^z, \sigma_1^z \otimes \sigma_2^+$  y sus herméticos conjugados.

## Apéndice D

# Definición de constantes y rango de validez en el modelo Schrieffer-Wolff

### D.1. Constantes del modelo SWT

El hamiltoniano obtenido en la transformación schrieffer-wolff corresponde a

$$\begin{aligned} H_{\text{SW}} = & -\eta_1 (\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z) \\ & + \eta_2 \sigma_1^z + \eta_3 \sigma_2^z + \eta_4 \\ & + h_1 \otimes (\sigma_1^+ + \text{h.c.}) \\ & + h_2 \otimes (\sigma_2^+ + \text{h.c.}) \\ & + h_3 (\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^+ + \text{h.c.}) \\ & + h_4 (\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \text{h.c.}) \\ & + h_5 (\sigma_1^z \otimes \sigma_2^+ + \text{h.c.}) \\ & + h_4 (\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^z + \text{h.c.}) , \end{aligned} \tag{D.1}$$

con las constantes definidas como

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{N_1}{D_1} \\ \eta_2 &= \frac{N_2}{D_2} \\ \eta_3 &= \frac{N_3}{D_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_1 = & F^2 \left( \mathbf{C1}^2 \Delta^2 (-F^6 - 4F^5U + F^4(3\Delta^2 - 2U^2) + 8F^3U(\Delta^2 + 4U^2) \right. \\
 & + F^2(-3\Delta^4 + 7U^4 + 8\Delta^2U^2) - 4FU(\Delta^2 - 4U^2)^2 - (U^2 - \Delta^2)^2(4U^2 - \Delta^2) \\
 & + \mathbf{Co}^2(F^8 - 2F^6(2\Delta^2 + 5U^2) + F^4(6\Delta^4 + 33U^4 + 10\Delta^2U^2) \\
 & \left. - 2F^2(2\Delta^6 + 20U^6 + \Delta^2U^4 - 5\Delta^4U^2) + (\Delta^4 + 4U^4 - 5\Delta^2U^2)^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_2 = & F^2 \left( \mathbf{C1}^2 \Delta^2 (-F^6 + 4F^5U + F^4(3\Delta^2 - 2U^2) - 8F^3U(\Delta^2 + 4U^2) + \right. \\
 & F^2(-3\Delta^4 + 7U^4 + 8\Delta^2U^2) + 4FU(\Delta^2 - 4U^2)^2 - (U^2 - \Delta^2)^2(4U^2 - \Delta^2) \\
 & + \mathbf{Co}^2(F^8 - 2F^6(2\Delta^2 + 5U^2) + F^4(6\Delta^4 + 33U^4 + 10\Delta^2U^2) \\
 & \left. - 2F^2(2\Delta^6 + 20U^6 + \Delta^2U^4 - 5\Delta^4U^2) + (\Delta^4 + 4U^4 - 5\Delta^2U^2)^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_3 = & 6U^3 \left( \mathbf{C1}^2 F^2 (F^4 - 5F^2U^2 + 4U^4) (\Delta^4 + F^4 + F^2(6\Delta^2 - 5U^2) \right. \\
 & + 4U^4 - 5\Delta^2U^2 - J^2(F^8 - 2F^6(2\Delta^2 + 5U^2) + F^4(6\Delta^4 + 33U^4 + 10\Delta^2U^2) \\
 & \left. - 2F^2(2\Delta^6 + 20U^6 + \Delta^2U^4 - 5\Delta^4U^2) + (\Delta^4 + 4U^4 - 5\Delta^2U^2)^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_4 = & F^2 \left( \mathbf{C1}^2 \Delta^2 (-F^6 - 4F^5U + F^4(3\Delta^2 - 2U^2) + 8F^3U(\Delta^2 + 4U^2) \right. \\
 & + F^2(-3\Delta^4 + 7U^4 + 8\Delta^2U^2) - 4FU(\Delta^2 - 4U^2)^2 - (U^2 - \Delta^2)^2(4U^2 - \Delta^2) \\
 & + \mathbf{Co}^2(F^8 - 2F^6(2\Delta^2 + 5U^2) + F^4(6\Delta^4 + 33U^4 + 10\Delta^2U^2) \\
 & \left. - 2F^2(2\Delta^6 + 20U^6 + \Delta^2U^4 - 5\Delta^4U^2) + (\Delta^4 + 4U^4 - 5\Delta^2U^2)^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_5 = & \mathbf{C1} F J (2F^7U - 12F^6U^2 + 2F^5U^3 - 3\Delta^2F^5U + 88F^4U^4 + 5\Delta^2F^4U^2 - 112F^3U^5 \\
 & + \Delta^2F^3U^3 + 2\Delta^4F^3U - 128F^2U^6 + 60\Delta^2F^2U^4 - 13\Delta^4F^2U^2 + 288FU^7 \\
 & - 164\Delta^2FU^5 \\
 & + 21\Delta^4FU^3 - \Delta^6FU - 128U^8 + 128\Delta^2 - U^6 - 40\Delta^4U^4 + 4\Delta^6U^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 = & \Delta(-\Delta + F - 2U)(-\Delta + F - U)(-\Delta + F + U) \\
 & \cdot (-\Delta + F + 2U)(\Delta + F - 2U)(\Delta + F - U)(\Delta + F + U)(\Delta + F + 2U)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 = & \Delta(-\Delta + F - 2U)(-\Delta + F - U)(-\Delta + F + U) \\
 & \cdot (-\Delta + F + 2U)(\Delta + F - 2U)(\Delta + F - U)(\Delta + F + U)(\Delta + F + 2U)
 \end{aligned}$$

$$D_3 = (F - 2U)(F - U)(F + U)(F + 2U)(-\Delta + F - 2U)(-\Delta + F - U) \\ (-\Delta + F + U)(-\Delta + F + 2U)(\Delta + F - 2U)(\Delta + F - U)(\Delta + F + U)(\Delta + F + 2U)$$

$$D_4 = (F - 2U)(F - U)(F + U)(F + 2U)(-\Delta + F - 2U)(-\Delta + F - U) \\ (-\Delta + F + U)(-\Delta + F + 2U)(\Delta + F - 2U)(\Delta + F - U)(\Delta + F + U)(\Delta + F + 2U)$$

$$D_5 = 2(F - 2U)(F - U)(F + 2U)(-\Delta + F - 2U)(-\Delta + F - U) \\ (-\Delta + F + 2U)(\Delta + F - 2U)(\Delta + F - U)(\Delta + F + 2U)$$

$$h_1 = \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(-\Delta - F - 2U)} - \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(-\Delta + F - 2U)} - \frac{\mathbf{C1FJ}}{4(-\Delta + F - U)} \\ - \frac{\mathbf{C1FJ}}{4(-\Delta - F + U)} - \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(-\Delta - F + 2U)} + \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(-\Delta + F + 2U)} \\ - \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(-F - 2U)} + \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(F - 2U)} + \frac{\mathbf{C1FJ}}{4(F - U)} \\ + \frac{\mathbf{C1FJ}}{4(U - F)} + \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(2U - F)} - \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(F + 2U)},$$

$$h_2 = -\frac{\mathbf{C1FJ}}{8(-\Delta - F - 2U)} + \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(-\Delta + F - 2U)} - \frac{\mathbf{C1FJ}}{4(-\Delta - F - U)} \\ - \frac{\mathbf{C1FJ}}{4(-\Delta + F + U)} + \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(-\Delta - F + 2U)} - \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(-\Delta + F + 2U)} \\ + \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(-F - 2U)} - \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(F - 2U)} + \frac{\mathbf{C1FJ}}{4(-F - U)} \\ + \frac{\mathbf{C1FJ}}{4(F + U)} - \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(2U - F)} + \frac{\mathbf{C1FJ}}{8(F + 2U)},$$

$$h_3 = \frac{\mathbf{C1}^2 F^2 (F^2 U - 4U^3 + \Delta^2 U)}{(-\Delta + F - 2U)(-\Delta + F + 2U)(\Delta + F - 2U)(\Delta + F + 2U)},$$

$$h_4 = -\frac{J^2 U}{(F - 2U)(F + 2U)},$$

$$\begin{aligned}
 h_5 = & -\frac{C1FJ}{8(-\Delta-F-2U)} + \frac{C1FJ}{8(-\Delta+F-2U)} + \frac{C1FJ}{4(-\Delta-F-U)} \\
 & - \frac{C1FJ}{4(-\Delta+F+U)} - \frac{C1FJ}{8(-\Delta-F+2U)} + \frac{C1FJ}{8(-\Delta+F+2U)} \\
 & - \frac{C1FJ}{8(-F-2U)} + \frac{C1FJ}{8(F-2U)} + \frac{C1FJ}{4(-F-U)} - \frac{C1FJ}{4(F+U)} \\
 & - \frac{C1FJ}{8(2U-F)} + \frac{C1FJ}{8(F+2U)},
 \end{aligned}$$

$$h_6 = \frac{N_5}{D_5},$$

$$C1 = C = 0,035;$$

## D.2. Rango de validez del modelo Schrieffer-Wolff

Usando la cuadro 3.1 podemos determinar el regimen de validez en SW. Dejaremos fija la interacción entre partículas  $U = 0,034$  y se varían los parámetros  $F$  (inclinación de la red) y  $\Delta$  (diferencia entre los niveles por sitio) como lo muestra la siguiente figura

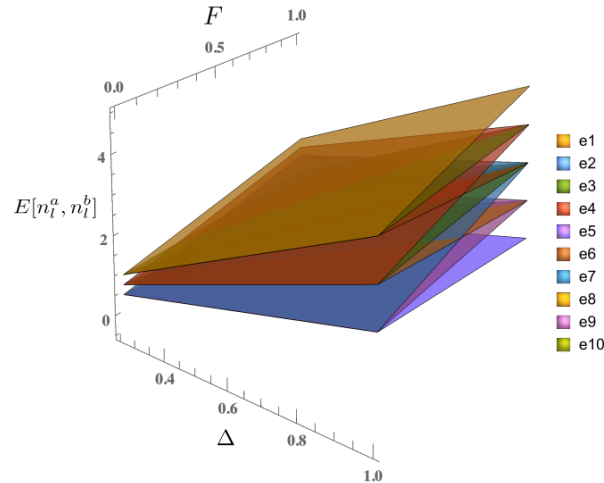


Figura D.1: Como varia la energía de los estados de Fock ( $N = L = 2$ ) con respecto a  $F$  y  $\Delta$ .

Quando se varían las energías de los estados con respecto a a estos dos parámetros ( $F$ ,  $\Delta$ ), el comportamiento de cada uno es representado por un plano. Existen regiones (valores de  $F$

y  $\Delta$ ) donde estos planos se interceptan. Luego de determinado valor predomina siempre una diferencia de energía para los estados.

Nuestro interés general es modelar la dinámica efectiva para diferentes inclinaciones de la red, por ende se fija  $\Delta = 0,1$  y se usa como escala para estudiar la dinámica con respecto a  $F$ . El siguiente gráfico muestra como varia la energía de los estados en la base de Fock con respecto a  $F$  dejando fijo  $U$  y  $\Delta$ .

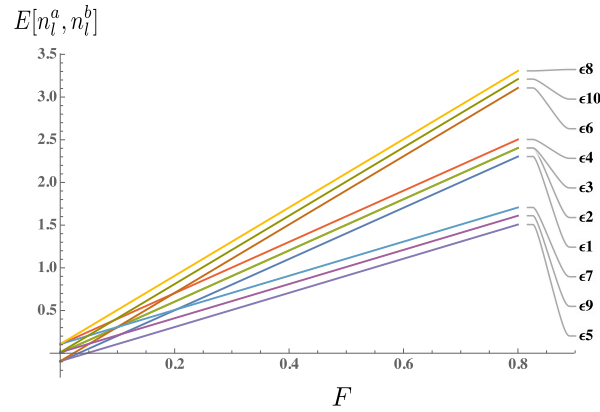


Figura D.2: Energías de los estados de Fock en  $N = L = 2$  con  $\Delta = 0,1$ .

El comportamiento de la energía para cada estado es lineal respecto a  $F$ , los estados de interés son representados por  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$ . Haciendo un zoom sobre la anterior figura los interceptos se encuentran para valores de  $0,3 \leq F \leq 2$  con algunas regiones donde la transformación aplica. A partir de este intervalo, tomando valores de  $F \geq$  la transformación siempre es valida. algunas de las indeterminaciones en el intervalo son  $F = 0,34$ ,  $F = 0,68$ ,  $F = 1,34$ ,  $F = 1,68$ . Para estos valores la energía de algunos estados es la misma por ende el factor de la parte perturbativa del hamiltoniano diverge puesto que su denominador corresponde a diferencias de energías de los estados.

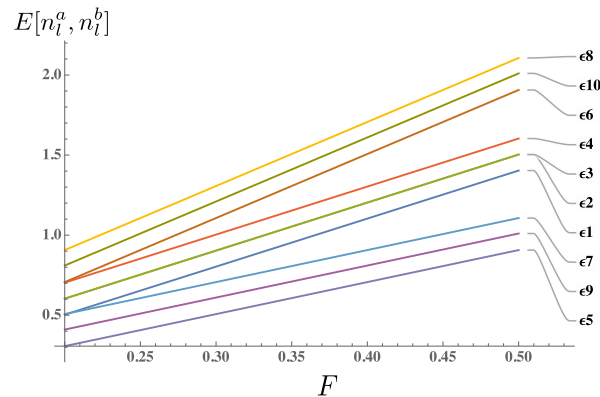


Figura D.3: El rango de validez de la transformación SW lo determina valores de  $F \geq 0,2$ .

Si escogemos un valor de  $F \geq 0,2$  aseguramos la diferencia de energía entre los estados de interés y el resto. Para valores menores a este  $F$  se debe tener cuidado con las indeterminaciones.





# Bibliografía

- [1] Markus Glück, Andrey R. Kolovsky, and Hans Jürgen Korsch. *Wannier–Stark resonances in optical and semiconductor superlattices*. *Physics Reports* **366**(3), 103 – 182 (2002). DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(02\)00142-4](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00142-4).
- [2] Carlos A. Parra-Murillo, Manuel H. Muñoz Arias, Javier Madroñero, and Sandro Wimberger. *Generation of robust entangled states in a non-Hermitian periodically driven two-band Bose-Hubbard system*. *Phys. Rev. A* **95**, 032125 (2017). DOI: [10.1103/PhysRevA.95.032125](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.95.032125).
- [3] Theodor W Hänsch and Arthur L Schawlow. *Cooling of gases by laser radiation*. *Optics Communications* **13**(1), 68–69 (1975).
- [4] Andrew J Kerman, Vladan Vuletić, Cheng Chin, and Steven Chu. *Beyond optical molasses: 3D Raman sideband cooling of atomic cesium to high phase-space density*. *Physical review letters* **84**(3), 439 (2000).
- [5] Carlos A Parra-Murillo, Javier Madronero, and Sandro Wimberger. *Two-band Bose-Hubbard model for many-body resonant tunneling in the Wannier-Stark system*. *Physical Review A* **88**(3), 032119 (2013).
- [6] Subir Sachdev, K Sengupta, and SM Girvin. *Mott insulators in strong electric fields*. *Physical Review B* **66**(7), 075128 (2002).
- [7] K Dieckmann, RJC Spreeuw, M Weidemüller, and JTM Walraven. *Two-dimensional magneto-optical trap as a source of slow atoms*. *Physical Review A* **58**(5), 3891 (1998).
- [8] J Hecker Denschlag, JE Simsarian, H Häffner, C McKenzie, A Browaeys, D Cho, Kristian Helmerson, SL Rolston, and William D Phillips. *A Bose-Einstein condensate in an optical lattice*. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **35**(14), 3095 (2002).
- [9] Markus Greiner, Olaf Mandel, Tilman Esslinger, Theodor W Hänsch, and Immanuel Bloch. *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*. *nature* **415**(6867), 39 (2002).
- [10] Corinna Kollath, Andreas M Läuchli, and Ehud Altman. *Quench dynamics and nonequilibrium phase diagram of the Bose-Hubbard model*. *Physical review letters* **98**(18), 180601 (2007).
- [11] T. D. Kühner and H. Monien. *Phases of the one-dimensional Bose-Hubbard model*. *Phys. Rev. B* **58**, R14741–R14744 (1998). DOI: [10.1103/PhysRevB.58.R14741](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.58.R14741).

- [12] Xiaobin Wang and Yiran Chen. *Spintronic Memristor Devices and Application*. In *Proceedings of the Conference on Design, Automation and Test in Europe*, DATE '10, pages 667–672, 3001 Leuven, Belgium, Belgium (2010). European Design and Automation Association.
- [13] S. Parkin, , C. Kaiser, A. Panchula, K. Roche, and M. Samant. *Magnetically engineered spintronic sensors and memory*. *Proceedings of the IEEE* **91**(5), 661–680 (2003). DOI: [10.1109/JPROC.2003.811807](https://doi.org/10.1109/JPROC.2003.811807).
- [14] L. Gutiérrez, A. Díaz-de Anda, J. Flores, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, and A. Morales. *Wannier-Stark Ladders in One-Dimensional Elastic Systems*. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 114301 (2006). DOI: [10.1103/PhysRevLett.97.114301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.114301).
- [15] Naftali Auerbach and Vladimir Zelevinsky. *Super-radiant dynamics, doorways and resonances in nuclei and other open mesoscopic systems*. *Reports on Progress in Physics* **74**(10), 106301 (2011).
- [16] Sergey Bravyi, David P DiVincenzo, and Daniel Loss. *Schrieffer–Wolff transformation for quantum many-body systems*. *Annals of physics* **326**(10), 2793–2826 (2011).
- [17] Stefan K Kehrein and Andreas Mielke. *Theory of the Anderson Impurity Model: The Schrieffer–Wolff Transformation Reexamined*. *annals of physics* **252**(1), 1–32 (1996).
- [18] Matthew T Hummon, Mark Yeo, Benjamin K Stuhl, Alejandra L Collopy, Yong Xia, and Jun Ye. *2D magneto-optical trapping of diatomic molecules*. *Physical Review Letters* **110**(14), 143001 (2013).
- [19] KG Makris, R El-Ganainy, DN Christodoulides, and Ziad H Musslimani. *Beam dynamics in P T symmetric optical lattices*. *Physical Review Letters* **100**(10), 103904 (2008).
- [20] T.W. Hänsch and A.L. Schawlow. *Cooling of gases by laser radiation*. *Optics Communications* **13**(1), 68 – 69 (1975). DOI: [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(75\)90159-5](https://doi.org/10.1016/0030-4018(75)90159-5).
- [21] P. D. Lett, W. D. Phillips, S. L. Rolston, C. E. Tanner, R. N. Watts, and C. I. Westbrook. *Optical molasses*. *J. Opt. Soc. Am. B* **6**(11), 2084–2107 (1989). DOI: [10.1364/JOSAB.6.002084](https://doi.org/10.1364/JOSAB.6.002084).
- [22] Wolfgang Ketterle and N.J. Van Druten. *Evaporative Cooling of Trapped Atoms*. volume 37 of *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, pages 181 – 236. Academic Press (1996).
- [23] R Gati and M K Oberthaler. *A bosonic Josephson junction*. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **40**(10), R61 (2007).
- [24] Oliver Morsch and Markus Oberthaler. *Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices*. *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179–215 (2006). DOI: [10.1103/RevModPhys.78.179](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.78.179).
- [25] Y Sivan, G Fibich, and MI Weinstein. *Waves in nonlinear lattices: ultrashort optical pulses and Bose-Einstein condensates*. *Physical review letters* **97**(19), 193902 (2006).
- [26] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*. *Science* **269**(5221), 198–201 (1995). DOI: [10.1126/science.269.5221.198](https://doi.org/10.1126/science.269.5221.198).

- 
- [27] Immanuel Bloch, Theodor W. Hänsch, and Tilman Esslinger. *Atom Laser with a cw Output Coupler*. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3008–3011 (1999). DOI: [10.1103/PhysRevLett.82.3008](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.3008).
  - [28] Ch Salomon, N Dimarcq, M Abgrall, A Clairon, Ph Laurent, P Lemonde, G Santarelli, P Uehrich, LG Bernier, G Busca, et al. *Cold atoms in space and atomic clocks: ACES*. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IV-Physics* **2**(9), 1313–1330 (2001).
  - [29] Maciej Lewenstein, Anna Sanpera, Veronica Ahufinger, Bogdan Damski, Aditi Sen, and Ujjwal Sen. *Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond*. *Advances In Physics* **56**(2), 243–379 (2007).
  - [30] B. Oelze, B. Ruck, M. Roth, R. Dömel, M. Siegel, A. Yu. Kidiyarova-Shevchenko, T. V. Filippov, M. Yu. Kupriyanov, G. Hildebrandt, H. Töpfer, F. H. Ihlmann, and W. Prusseit. *Rapid single-flux-quantum balanced comparator based on high-Tc bicrystal Josephson junctions*. *Applied Physics Letters* **68**(19), 2732–2734 (1996). DOI: [10.1063/1.115580](https://doi.org/10.1063/1.115580).
  - [31] Harold J Metcalf and Peter Van der Straten. *Laser cooling and trapping*. Springer Science & Business Media (2012).
  - [32] Antonio Barone and Gianfranco Paterno. *Physics and applications of the Josephson effect*. Wiley (1982).
  - [33] Markus Glück, Andrey R Kolovsky, and Hans Jürgen Korsch. *Wannier–Stark resonances in optical and semiconductor superlattices*. *Physics Reports* **366**(3), 103–182 (2002).
  - [34] Andrey R Kolovsky and Andreas Buchleitner. *Floquet-Bloch operator for the Bose-Hubbard model with static field*. *Physical Review E* **68**(5), 056213 (2003).
  - [35] *A theory of the electrical breakdown of solid dielectrics*. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **145**(855), 523–529 (1934). DOI: [10.1098/rspa.1934.0116](https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0116).
  - [36] A Zenesini. A. Zenesini, H. Lignier, G. Tayebirad, J. Radogostowicz, D. Ciampini, R. Manneilla, S. Wimberger, O. Morsch, and E. Arimondo, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 090403 (2009). *Phys. Rev. Lett.* **103**, 090403 (2009).
  - [37] J. Zmuidzinas and P. L. Richards. *Superconducting detectors and mixers for millimeter and submillimeter astrophysics*. *Proceedings of the IEEE* **92**(10), 1597–1616 (2004). DOI: [10.1109/JPROC.2004.833670](https://doi.org/10.1109/JPROC.2004.833670).
  - [38] Satyendra Nath Bose. *Plancks gesetz und lichtquantenhypothese*. (1924).
  - [39] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969–3973 (1995). DOI: [10.1103/PhysRevLett.75.3969](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.3969).
  - [40] Patrick Plötz. *Complex dynamics of ultracold atoms*. PhD thesis (2010).
  - [41] Jonathan Simon, Waseem S Bakr, Ruichao Ma, M Eric Tai, Philipp M Preiss, and Markus Greiner. *Quantum simulation of antiferromagnetic spin chains in an optical lattice*. *Nature* **472**(7343), 307 (2011).

- [42] Florian Meinert, Manfred J Mark, Emil Kirilov, Katharina Lauber, Philipp Weinmann, Andrew J Daley, and H-C Nägerl. *Quantum quench in an atomic one-dimensional Ising chain. Physical review letters* **111**(5), 053003 (2013).